6.7 Isolierte Singularitäten

Definition: *Eine analytische Funktion* f *hat in einem Punkt* $a \in \mathbb{C}$ *eine* isolierte Singularität, *falls* f *in einem Kreisring*

$$B_r(a) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\} \qquad \text{für } r > 0,$$

definiert ist, aber nicht im Punkt a. □

Beispiele:

- $f(z) = \sin(z)/z$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
- $f(z) = 1/(1 + z^2)$ besitzt in $z = \pm i$ isolierte Singularitäten.
- $f(z) = \exp(1/(1 - z))$ besitzt in $z = 1$ eine isolierte Singularität.
- Der komplexe Logarithmus $\text{Log}(z)$ ist in $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq 0\}$ nicht definiert. Somit ist der Punkt $z = 0$ *keine* isolierte Singularität von $\text{Log}(z)$.

□

Drei Typen isolierter Singularitäten.

Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Insbesondere ist f analytisch in $B_r(a) \setminus \{a\}$. Dann kann f in $B_r(a) \setminus \{a\}$ in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$$

entwickelt werden. Wir unterscheiden drei Typen von isolierten Singularitäten.

Definition: f *besitze in* $a \in \mathbb{C}$ *eine isolierte Singularität. Dann heißt* a

- *eine* `hebbare Singularität` *von* f*, falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten* c_n *mit* $n < 0$ *verschwinden;*
- *ein* `Pol der Ordnung m` *von* f*, falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten* c_n *mit* $n < 0$ *von Null verschieden sind und* $-m$ *die kleinste Zahl ist mit* $c_{-m} \neq 0$*.*
- *eine* `wesentliche Singularität` *von* f*, falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten* c_n *mit* $n < 0$ *von Null verschieden sind.* □

Beispiel.

- Betrachte die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

- f besitzt eine isolierte Singularität in $z = 0$.
- Wir bestimmen nun die Laurent-Reihe von f um Null.
- Mit der Taylor-Reihe der Sinus-Funktion

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \ldots$$

  erhalten wir nach Division durch $z \neq 0$ die Laurent-Reihe

$$\frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} \pm \ldots$$

- Somit ist $z = 0$ eine hebbare Singularität von f. $\square$

Noch ein Beispiel.

- Wir untersuchen die isolierte Singularität $z = i$ von

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{z-i+2i} \\
&= \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\left[1+\frac{i}{2}(z-i)+\left(\frac{i}{2}\right)^2(z-i)^2+\ldots\right] \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2^2}(z-i)^0+\frac{i}{2^3}(z-i)+\ldots
\end{aligned}$$

- Somit hat f in $z = i$ einen Pol erster Ordnung. □

Und noch ein Beispiel.

- Wir untersuchen die isolierte Singularität $z = 1$ der Funktion

$$f(z) = \exp(1/(1-z)).$$

- Die Laurent-Entwicklung

$$\exp(1/(1-z)) = 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \ldots$$

  von f enthält unendlich viele Glieder mit negativen Potenzen von $z-1$.

- Somit ist $z = 1$ eine wesentliche Singularität von f. $\square$

Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich.

- Sei f eine rationale Funktion, d.h. mit Polynomen $p(z)$ und $q(z)$, gilt

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

- Dann besitzt f nur bei den Nullstellen von q isolierte Singularitäten.
- Sei z_0 Nullstelle der Ordnung m von $q(z)$, so dass

$$q(z) = (z - z_0)^m q_1(z)$$

für ein Polynom $q_1(z)$ mit $q_1(z_0) \neq 0$. Somit gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{p(z)}{q_1(z)}$$

wobei $p(z)/q_1(z_0)$ um z_0 in eine Taylor-Reihe um z_0 entwickelt werden kann,

$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich.

- Die Taylor-Reihe
$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$
konvergiert für ein $r > 0$ in dem Kreis $B_r(z_0)$ um z_0.

- So bekommt man die Laurent-Reihe
$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{m} a_n (z - z_0)^{n-m} \\ &= \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-2}} + \ldots, \end{aligned}$$
die im Kreisring $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ konvergiert.

- Wie man an der Form der Laurent-Reihe sieht, ist z_0 entweder ein Pol oder eine hebbare Singularität von f, aber keine wesentliche Singularität. $\square$

Werteverhalten bei hebbaren Singularitäten.

Satz: *Sei* f *analytisch im Kreisring* $B_r(a) \setminus \{a\}$. *Weiterhin sei* a *eine hebbare Singularität von* f. *Dann existiert der Grenzwert*

$$\alpha := \lim_{z \to a} f(z)$$

Definiert man $f(a) := \alpha$, *so ist die derart erweiterte Funktion in der vollen Kreisscheibe* $B_r(a)$ *analytisch.* $\square$

Beweis: Mit der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

bekommt man sofort den Grenzwert $\alpha = c_0 = \lim_{z \to a} f(z)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} &= \lim_{z \to a} \frac{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots - c_0}{z-a} \\ &= \lim_{z \to a} \frac{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots}{z-a} = c_1. \end{aligned}$$ $\blacksquare$

Der Satz von Riemann.

Es gilt die Umkehrung des vorigen Satzes, hier in seiner verschärften Form:

Satz (`Satz von Riemann`)**:** *Die Funktion* f *besitze in* a *eine isolierte Singularität. Falls* f *in einem Kreisring* $B_r(a) \setminus \{a\}$ *beschränkt ist, so ist* a *eine hebbare Singularität von* f.

Beweis: Sei f beschränkt in $B_r(a) \setminus \{a\}$ mit $|f(z)| \leq M$. Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

verschwinden alle c_n mit $n < 0$, denn es gilt die Abschätzung

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n} \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Für $n < 0$ bekommt man für $\rho \to 0$ den Grenzwert Null.

Somit gilt $c_n = 0$ für alle $n < 0$. $\blacksquare$

Werteverhalten bei Polstellen.

Aus dem Satz von Riemann ziehen wir zunächst die

Folgerung: Ist eine isolierte Singularität a von f nicht hebbar, so ist f in keiner Umgebung von a beschränkt. $\square$

Satz: *Hat die Funktion f in a einen Pol, so gilt*

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$

Beweis: Aus der Laurent-Entwicklung von f um a,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \frac{c_{-m+2}}{(z-a)^{m-2}} + \ldots \\ &= \frac{1}{(z-a)^m} \left[c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + c_{-m+2}(z-a)^2 + \ldots \right] \end{aligned}$$

mit $m > 0$ und $c_{-m} \neq 0$, folgt die Behauptung unmittelbar. $\blacksquare$

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$f(z) = \exp(1/z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots .$$

- f besitzt in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.
- Für $z = x$, x reell und *positiv*, gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \exp(1/x) = \infty$$

- Für $z = x$, x reell und *negativ*, gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} \exp(1/x) = \lim_{x \searrow 0} \exp(-1/x) = 0$$

- Für $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, existiert der Grenzwert nicht:

$$\lim_{z \to 0} \exp(1/z) = \lim_{y \to 0} \exp(1/(iy)) = \lim_{y \to 0} \exp(-i/y)$$

Der Satz von Casorati-Weierstrass.

Satz (Satz von Casorati-Weierstrass): *Die Funktion f besitze im Punkt $a \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität. Dann kommen die Werte von f in jeder Umgebung von a jeder komplexen Zahl beliebig nahe.*

Beweis durch Widerspruch: Sei $U = B_r(a) \setminus \{a\}$ eine Umgebung von a. Weiterhin sei $w_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, der die Werte von f in U nicht beliebig nahe kommen, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \qquad \text{für alle } z \in U.$$

Dann ist die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \qquad \text{für } z \in U$$

analytisch in U, und wegen $|g(z)| \leq 1/\epsilon$ beschränkt.

Beweis des Satzes von Casorati-Weierstrass.

Somit ist a eine hebbare Singularität von g, so dass in U die Darstellung

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} (z-a)^n = (z-a)^m g_1(z)$$

für $m \geq 0$ gilt, wobei $g_1(z)$ in $B_r(a)$ analytisch ist. Daraus folgt die Darstellung

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)} = w_0 + \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g_1(z)} \qquad \text{für } z \in U$$

für f in U. Zusammen mit der Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \qquad \text{für } z \in U$$

erhalten wir die Laurent-Reihe von f in U,

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + b_m + w_0 + b_{m+1}(z-a) + \ldots,$$

im Widerspruch zur Annahme, wonach a wesentliche Singularität ist. ■

Der Hauptteil einer Laurent-Reihe.

Definition: *Sei a eine isolierte Singularität der Funktion f, und es sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

die Laurent-Reihe von f um a. Dann heißt die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

der zu a gehörige `Hauptteil` *von f.* □

Bemerkungen:

- Für eine hebbare Singularität verschwindet der Hauptteil.
- Für einen Pol ist der Hauptteil ein Polynom in $1/(z-a)$.

Satz: *Eine rationale Funktion* f*, die im Unendlichen verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile,* $f = h_1 + h_2 + \ldots + h_N$.

Beweis: Sei f rational. Dann ist f in der komplexen Ebene bis auf endlich viele Polstellen $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ analytisch. Betrachte nun die zugehörigen Hauptteile

$$h_k(z) = \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{kn}}{(z - z_k)^n} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, N,$$

von f. Dann ist die Funktion $g = f - \sum_{k=1}^N h_k$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ analytisch.

Da nun für jedes z_k der zugehörige Hauptteil h_k in der Laurent-Reihe von g um z_k wegfällt, ist z_k eine hebbare Singularität von g, für $k = 1, \ldots, N$.

Damit ist g eine ganze Funktion, d.h. g ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$.

Schließlich gilt

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) - \sum_{k=1}^{N} \lim_{z\to\infty} h_k(z) = 0,$$

somit ist g beschränkt auf $\mathbb{C}$, nach dem Satz von Liouville konstant mit $g \equiv 0$. ■