6.8 Residuenkalkül

Erinnerung:

- Sei f analytisch auf einem zweifach zusammenhängenden Gebiet G, d.h. G besitzt genau ein "Loch" L.
- Weiterhin seien Γ und Γ_1 zwei positiv orientierte geschlossene Wege, die das Loch L einmal umlaufen.
- **Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes:** Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz.$$

- **Ziel:** Weitere Verallgemeinerung auf mehrere Löcher $L_1, \ldots, L_N$.

Integrale in Gebieten mit zwei Löchern.

- Sei f analytisch in einem Gebiet G, das zwei disjunkte Löcher L_1 und L_2 hat.
- Sei $\Gamma \subset G$ eine positiv orientierte Kurve um L_1 und L_2.
- Weiterhin seien $\Gamma', \Gamma'' \subset G$ zwei geschlossene Kurven mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$, wobei
  - ◇ Γ' das Loch L_1 einmal im positiven Sinne umläuft (aber nicht L_2 umläuft);
  - ◇ Γ'' das Loch L_2 einmal im positiven Sinne umläuft (aber nicht L_1 umläuft).
- Dann gilt für beliebige geschlossene Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$, die jeweils nur L_1 bzw. L_2 einmal im positiven Sinne umlaufen (siehe Skizze)

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma'} f(z)\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma''} f(z)\,dz$$

und weiterhin mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ die Formel

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

□

Integrale in Gebieten mit mehreren Löchern.

- Sei f analytisch in einem Gebiet G, das N disjunkte Löcher $L_1, \ldots, L_N$ hat.
- Sei $\Gamma \subset G$ eine positiv orientierte Randkurve um $L_1, \ldots, L_N$.
- Weiterhin seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ geschlossene Kurven in G, wobei für $k = 1, \ldots, N$
  - ◇ Γ_k das Loch L_k einmal im positiven Sinne umläuft;
  - ◇ Γ_k keines der anderen Löcher (außer L_k) umläuft.
- Dann gilt die Formel

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz.$$

Bemerkung: Die Formel gilt insbesondere für den Fall, bei dem die Löcher L_k jeweils zu einem Punkt $z_k \in G$ zusammenfallen, d.h. f besitzt isolierte Singularitäten in $z_1, \ldots, z_N$. □

Zur Bedeutung des Laurent-Koeffizienten c_{-1}.

Erinnerung: Für die Koeffizienten der Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_k)^n \qquad \text{für } 0 < |z - z_k| < r$$

von $f(z)$ um z_k gilt die Darstellung

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(z)}{(z - z_k)^{n+1}}\, dz \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Insbesondere gilt die Formel

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z)\, dz$$

bzw.

$$\int_{\Gamma_k} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot c_{-1}.$$

□

Das Residuum.

Definition: *Die Funktion* f *besitze im Punkt* a *eine isolierte Singularität. Dann kann* f *in einer Umgebung von* a *durch eine Laurent-Reihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \textit{für } 0 < |z-a| < r$$

dargestellt werden. Der Koeffizient $c_{-1} \in \mathbb{C}$ *wird als* `Residuum` *von* f *in* a *bezeichnet. Wir verwenden dafür die Notationen*

$$\mathrm{Res} f(a) \qquad \textit{bzw.} \qquad \mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=a}.$$

$\square$

Bemerkungen:

- Der Begriff des Residuums bezieht sich auf die Laurent-Reihe von f um a, die in der Umgebung $B_r(a) \setminus \{a\}$ gilt, nicht auf beliebigen Kreisringen $B_{r_1}^{r_2}(a)$.
- Insbesondere ist das Residuum von f in a eindeutig.
- Falls f analytisch in ganz $B_r(a)$, so gilt $\mathrm{Res} f(a) = 0$. $\square$

Der Residuensatz.

Satz (Residuensatz):
Die Funktion f *sei bis auf endlich viele isolierte Singularitäten* $z_1, \ldots, z_N$ *in dem einfach zusammenhängenden Gebiet* G *analytisch. Weiterhin sei* $\Gamma \subset G$ *eine positiv orientierte geschlossene Kurve, die alle Singularitäten einmal umläuft. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res} f(z_k).$$

Bemerkung: Die Integral-Darstellung im Residuensatz erweitert man wie folgt.

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in G_\Gamma} \operatorname{Res} f(z)$$

denn es gilt $\operatorname{Res} f(z) = 0$ für alle $z \in G \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$. Insbesondere gilt

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in G_\Gamma} \operatorname{Res} f(z) = 0$$

(der Cauchysche Integralsatz), falls f auf ganz G analytisch ist. $\square$

Residuenbestimmung in einem Pol erster Ordnung.

- Sei a Pol erster Ordnung von f.
- Dann besitzt f um a die Laurent-Reihendarstellung

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

- Somit gilt

$$(z-a)f(z) = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + c_2(z-a)^3 + \ldots$$

in einer Umgebung von a. Für $z \to a$ bekommt man daraus

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a)f(z).$$

Satz: *Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ einen Pol erster Ordnung. Dann gilt*

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z \to a} (z-a)f(z).$$

□

Folgerung.

Voraussetzungen: Die Funktion f besitze die Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

wobei p und q analytische Funktionen seien.

Weiterhin besitze q in a eine einfache Nullstelle, d.h.

$$q(a) = 0 \qquad \text{und} \qquad q'(a) \neq 0.$$

Dann gilt

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = \lim_{z \to a} (z - a) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \to a} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(a)}{z - a}} = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

In diesem Fall ist a

- entweder ein Pol erster Ordnung von f (falls $p(a) \neq 0$);
- oder eine hebbare Singularität von f (falls $p(a) = 0$). □

Zusammenfassung. Sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine Funktion, wobei $p(z)$ und $q(z)$ in einer Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ analytisch seien. Weiterhin besitze q in a eine einfache Nullstelle. Falls $p(a) \neq 0$, so ist a ein Pol erster Ordnung von f mit Residuum

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

Falls $p(a) = 0$, so ist a eine hebbare Singularität von f. □

Beispiel: Berechnen für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

das Residuum in $z = i$. Es gilt $f(z) = p(z)/q(z)$ mit $p(z) = 1, q(z) = 1 + z^2$,

$$\operatorname{Res} f(i) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

Anwendungen des Residuensatzes.

Beispiel 1: Wir berechnen das uneigentliche reelle Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Setze

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

für $R > 0$, so dass $I = \lim_{R\to\infty} I_R$.

Wir schreiben das reelle Integral I_R als komplexes Integral

$$I_R = \int_{\Gamma'} f(z)\,dz$$

längs des Integrationsweges $\Gamma' = [-R, R] \subset \mathbb{C}$ über die analytische Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Fortsetzung des Beispiels.

- Sei Γ'' der Halbkreis mit Mittelpunkt Null und Radius R, positiv orientiert von $(R, 0)$ nach $(-R, 0)$ (siehe Skizze).
- Für $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ gilt dann
$$\int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int_{\Gamma'} \frac{1}{1+z^2}\,dz + \int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2}\,dz = I_R + J_R.$$
- Betrachte das Integral
$$J_R = \int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2}\,dz$$
- Für $R > 1$ gilt $|1+z^2| \geq R^2 - 1$ auf Γ'' und somit
$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1} \qquad \text{für } z \in \Gamma''.$$
- Daraus folgt
$$|J_R| = \left|\int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}.$$

Weitere Fortsetzung des Beispiels.

- Weiter folgt $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$, und somit gilt

$$I = I_R = \int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

- Dieses Integral berechnen wir mit dem Residuensatz: Es gilt

$$I = \int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

- **Elementare Berechnung des Integrals** (mit Methoden der reellen Analysis)**:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

$\square$

Nächstes Beispiel. Betrachte das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+4}\,dx := I/2.$$

- Der Integrand ist gerade, und somit gilt

$$I = \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4}\,dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_\Gamma \frac{1}{z^4+4}\,dz - J_R,$$

  wobei erneut $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$.

- Wir bestimmen das Integral I_R nun mit dem Residuensatz.

Fortsetzung des Beispiels.

- Der Integrand
$$f(z) = \frac{1}{z^4+4}$$
besitzt Pole erster Ordnung in den vier Punkten $\pm 1 \pm i$.

- Für $R > \sqrt{2}$ werden die beiden Pole $z = \pm 1 + i$ von Γ umlaufen.

- Es gilt

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4+4}\bigg|_{z=1+i} = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=1+i} = \frac{1}{4(1+i)^3} = \frac{1+i}{4(1+i)^4} = -\frac{1+i}{16}$$
$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4+4}\bigg|_{z=-1+i} = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=-1+i} = \frac{1}{4(-1+i)^3} = \frac{-1+i}{4(-1+i)^4} = -\frac{-1+i}{16}$$

- Daraus folgt mit dem Residuensatz

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^4+4}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1+i}{16} - \frac{-1+i}{16}\right) = \frac{\pi}{4} = I.$$

□

Nächstes Beispiel. Betrachte für $a > 0$ und $\omega > 0$ das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\, dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\, dx \qquad \text{und} \qquad J_R = \int_{\Gamma''} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\, dz$$

wobei erneut $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$, und somit

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\, dz.$$

- Mit dem Residuensatz gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\bigg|_{z=ia} = 2\pi i \frac{e^{-\omega a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}.$$

$\square$

Letztes Beispiel. Betrachte für $0 < \alpha < 1$ das reelle Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx < \infty.$$

Zur Berechnung von I betrachten wir das komplexe Integral

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^\alpha(1+z)}\,dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

wobei $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ (siehe Skizze). Der Integrand ist analytisch, bis auf einen Pol erster Ordnung in $z = -1$. Weiterhin gilt

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \delta\to 0}} I_1 = I. \qquad \lim_{R\to\infty} I_2 = 0 \qquad \lim_{\delta\to 0} I_4 = 0,$$

so dass das Integral

$$I_3 = \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z^\alpha(1+z)}\,dz$$

zu bestimmen bleibt.

Fortsetzung des Beispiels. Parametrisiere den Integrationsweg $-\Gamma_3$ mit $z(t) = t$ für $\delta \le t \le R$. Nun gilt mit $z^\alpha = |z|^\alpha e^{2\pi i\alpha}$ auf Γ_3

$$I_3 = -\int_\delta^R \frac{e^{-2\pi i\alpha}}{t^\alpha(1+t)}\,dt = -e^{-2\pi i\alpha} I_1$$

somit

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \delta\to 0}} \int_\Gamma \frac{1}{z^\alpha(1+z)}\,dz = I(1-e^{-2\pi i\alpha}).$$

Mit dem Residuensatz bekommen wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z^\alpha(1+z)}\,dz = \mathrm{Res}\frac{1}{z^\alpha(1+z)}\bigg|_{z=-1} = \mathrm{Res}\frac{z^{-\alpha}}{1+z}\bigg|_{z=-1} = e^{-i\alpha\pi},$$

somit

$$I = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\alpha}}e^{-i\alpha\pi} = \pi\frac{2i}{e^{i\alpha\pi}-e^{-i\alpha\pi}}$$

bzw.

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Das Integral ist für $\alpha \to 0$ bzw. $\alpha \to 1$ divergent. $\square$