Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichung.

Ziel: Bestimme eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

die den Wachstumsbedingungen

$$\lim_{|t|\to\infty} y(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{|t|\to\infty} y'(t) = 0$$

genügt. Fourier-Transformation auf beiden Seiten der Gleichung ergibt

$$\left(-\omega^2 + i\omega a + b\right) Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei $Y = \mathcal{F}[y]$ und $C = \mathcal{F}[c]$. Somit gilt

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega).$$

Rücktransformation liefert mit dem Faltungssatz die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} \, d\tau \, d\omega.$$

Anwendung: Wärmeleitung.

Ausgangspunkt: Wir untersuchen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung für einen *unendlich* langen Stsb,

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= c u_{xx}(x,t) \quad \text{für } -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$\begin{aligned} U_t(\omega,t) &= c(i\omega)^2 U(\omega,t) \\ U(\omega,0) &= U_0(\omega) \end{aligned}$$

und somit

$$U(\omega,t) = U_0(\omega) e^{-c\omega^2 t},$$

wobei $U = \mathcal{F}[u]$ die Fourier-Transformation von $u \equiv u(\cdot,t)$ bezeichnet.

Fortsetzung des Anwendungsbeispiels.

Zur Rücktransformation bestimmen wir zunächst das Urbild von $e^{-ct\omega^2}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-ct\omega^2}\right](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct\omega^2} e^{i\omega x}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left([\sqrt{ct}\omega]^2 - ix/\sqrt{ct}[\sqrt{ct}\omega] - x^2/(4ct)\right)} \cdot e^{-x^2/(4ct)}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/(4ct)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left([\sqrt{ct}\omega] - ix/(2\sqrt{ct})\right)^2}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} e^{-x^2/(4ct)}.
\end{aligned}$$

Mit Anwendung des Faltungssatzes bekommt man die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}} u_0(\xi)\, d\xi.$$

Der Faktor $G(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}}$ heißt Greensche Funktion. □

Anwendung: Potentialgleichung.

Ausgangspunkt: Betrachte das Potentialproblem auf der Halbebene.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit

$$U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega| y} + C_2 e^{-|\omega| y}$$

Da die Lösung für $|y| \to \infty$ verschwindet, gilt $C_1 = 0$ und somit

$$U(\omega, y) = U_0(y) e^{-|\omega| y}.$$

Es gilt $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\omega| y}\right] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$ und weiterhin mit dem Faltungssatz

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-\xi)^2} u_0(\xi)\, d\xi.$$

Das Theorem von Shannon.

Satz (Shannonsches Abtasttheorem)**:**

Sei $f(t)$ *ein bei* $t = 0$ *einsetzendes und für alle* $t \geq 0$ *definiertes Signal. Durch* $f(-t) = f(t)$ *werde* f *zu einer geraden Funktion auf* $\mathbb{R}$ *fortgesetzt. Weiterhin erfülle* f *die Voraussetzungen für den Satz über die Fourier-Umkehrformel. Schließlich sei das Spektrum von* f *beschränkt, d.h. für ein* $\omega_0 > 0$ *gilt*

$$\hat{f}(\omega) = 0 \qquad \text{für } |\omega| > \omega_0 > 0.$$

Tastet man f *zu den Zeitpunkten*

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ab, so kann f *aus diesen Informationen für alle* t *exakt rekonstruiert werden.*

Beweis: Unter den Voraussetzungen für die Fourier-Umkehrformel gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

Setze $\hat{f}(\omega)$ zu einer $2\omega_0$-periodischen Funktion fort, mit

$$\hat{f}(\omega \pm 2\omega_0) = \hat{f}(\omega).$$

Dann besitzt die Fourier-Reihe

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega}$$

die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega} \, d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Setzt man die Darstellung von $\hat{f}$ in die Umkehrformel ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\, d\omega, \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{i(t+k\pi/\omega_0)} \left[e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\right]_{\omega=-\omega_0}^{\omega=\omega_0} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_0 c_k \frac{1}{\omega_0 t + k\pi} \sin(\omega_0 t + k\pi). \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \frac{\sin(\omega_0 t + k\pi)}{\omega_0 t + k\pi} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$