# 8 Laplace-Transformation

**Ausgangspunkt:** Die Heaviside-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

besitzt **keine** Fourier-Transformation.

**Denn:** Formal bekommt man das unbestimmte Integral

$$\hat{u}(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{i\omega}\left[1 - \lim_{\tau\to\infty}\left(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)\right)\right]$$

das für $\omega \neq 0$ offensichtlich nicht existiert.

**Beachte:** $u \notin L_1(\mathbb{R})$.

# Gibt es alternative Integraltransformationen?

**Voraussetzung:** Ab sofort $f(t) = 0$ für $t < 0$, so dass formal (wie eben)

$$g(\omega) := \hat{f}(\omega) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau.$$

**Nun:** Um Konvergenz zu erzwingen, verwenden wir `konvergenzerzeugenden Faktor` $e^{-at}$, für $a > 0$, und betrachten stattdessen das uneigentliche Integral

$$G(\omega) = \int_0^\infty F(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau \qquad \text{wobei } F(\tau) = e^{-a\tau} f(\tau) \quad \text{für } a > 0.$$

und somit

$$G(\omega) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-(a+i\omega)\tau} \, d\tau$$

**Beachte:** Es gelten (unter Voraussetzungen an f) die (Fourier-)Umkehrformeln

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G(\omega) e^{(a+i\omega)t} \, d\omega. \end{aligned}$$

# Konstruktion der Laplace-Transformation.

**Ausgangspunkt:** Mit der Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{(a+i\omega)t} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-(a+i\omega)\tau} e^{(a+i\omega)t} \, d\tau \, d\omega$$

und der Substitution $s = a + i\omega \in \mathbb{C}$ erhält man mit dem Symbol

$$[\mathcal{L}(f)](s) := G\left(\frac{s-a}{i}\right) = G(\omega)$$

die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \, d\tau =: \phi(s)$$

sowie die Laplace-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s) e^{st} \, ds =: \left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t).$$

$\square$

# Die Laplace-Transformation und deren Inverse.

**Definition:** *Falls für* $f$ *das uneigentliche Integral*

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \phi(s)$$

*existiert, so bezeichnet man* $\phi$ *als* Laplace-Transformation *von* $f$.

*Falls für* $\phi$ *das uneigentliche Integral*

$$\left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s)e^{st}\,ds$$

*existiert, so bezeichnet man* $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$ *als* inverse Laplace-Transformation *von* $\phi$. *Der Integraloperator* $\mathcal{L}^{-1}$ *wird entsprechend als* inverse Laplace-Transformation *bezeichnet.*

*Somit gilt (unter geeigneten Voraussetzungen)*

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f)](s) \qquad \textit{und} \qquad f(t) = [\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t).$$

□

# Zur Existenz der Laplace-Transformation.

**Satz:** *Sei* $f$ *auf* $(0, \infty)$ lokal integrierbar*, und es gelte*

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

*mit geeigneten Konstanten* $M$ *und* $\gamma$*, so existiert die Laplace-Transformation*

$$\phi(s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\, d\tau$$

*für alle* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > \gamma$.

**Beweis:** Mit $f(t)$ ist auch $e^{-st}f(t)$ lokal integrierbar, und wegen

$$\left|e^{-st}f(t)\right| = e^{-\mathrm{Re}(s)\cdot t}|f(t)|$$

gilt mit dem Majorantenkriterium sogar absolute Konvergenz,

$$\left|\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\, d\tau\right| \leq \int_0^\infty Me^{-(\mathrm{Re}(s)-\gamma)\tau}\, d\tau = \frac{M}{\mathrm{Re}(s) - \gamma}. \qquad \blacksquare$$

- Das Infimum aller $\gamma$ mit obiger Abschätzung heißt Konvergenzabzisse von $f$.

# Beispiele.

**Beispiel 1:** Für die Heaviside-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

gilt

$$[\mathcal{L}(u)](s) = \phi(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}\, d\tau = -\frac{1}{s}\left[e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \frac{1}{s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$. In diesem Fall ist $\gamma_0 = 0$ die Konvergenzabzisse.

**Beispiel 2:** Für $\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(\beta)$ (und somit $\gamma_0 = -\mathrm{Re}(\beta)$) gilt

$$\left[\mathcal{L}\left(e^{-\beta t}\right)\right](s) = \int_0^\infty e^{-(\beta+s)\tau}\, d\tau = \frac{1}{s+\beta}.$$

# Weiteres Beispiel.

**Beispiel 3:** Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}(\sin(\beta t))](s) &= \int_0^\infty \sin(\beta\tau) e^{-s\tau}\, d\tau \\
&= -\frac{1}{\beta}\left[\cos(\beta\tau)e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} - \frac{s}{\beta}\int_0^\infty \cos(\beta\tau)e^{-s\tau}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\beta} - \frac{s}{\beta}\left\{\frac{1}{\beta}\left[\sin(\beta\tau)e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + \frac{s}{\beta}\int_0^\infty \sin(\beta\tau)e^{-s\tau}\, d\tau\right\}
\end{aligned}$$

und somit

$$\left(1 + \frac{s^2}{\beta^2}\right)[\mathcal{L}(\sin(\beta t))](s) = \frac{1}{\beta} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0$$

Analog zeigt man

$$[\mathcal{L}(\cos(\beta t))](s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0$$

$\square$

# Noch ein Beispiel.

**Beispiel 4:** Betrachte für $s > 0$ (reell und positiv) die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(t^n)](s) = \int_0^\infty \tau^n e^{-s\tau} \, d\tau$$

so folgt (mit der Substitution $\xi = s\tau$)

$$[\mathcal{L}(t^n)](s) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty \xi^n e^{-\xi} \, d\xi = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad \text{für } s > 0,$$

und somit (für $n \in \mathbb{N}_0$)

$$[\mathcal{L}(t^n)](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \text{für } s > 0.$$

$\square$

# Laplace-Transformation von Ableitungen.

Erfüllt $f'$ für $f \in C^1$ die Voraussetzungen des vorigen Satzes zur Existenz der Laplace-Transformation, so bekommt man für die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f')](s) = \int_0^\infty f'(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

mit partieller Integration

$$[\mathcal{L}(f')](s) = \left[f(\tau)e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + s\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau,$$

so dass mit (der angegebenen Voraussetzung) $\lim_{\tau\to\infty} f(\tau)e^{-s\tau} = 0$ gilt

$$[\mathcal{L}(f')](s) = s \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - f(0).$$

Für höhere Ableitungen von f gilt unter entsprechenden Voraussetzungen

$$\left[\mathcal{L}(f^{(n)})\right](s) = s^n \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).$$

$\square$

# Noch mehr Beispiele.

**Beispiel 5:** Mit der Substitution $k\tau = \xi$ bekommt man für

$$[\mathcal{L}(f(kt))]\,(s) = \int_0^\infty f(k\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \qquad \text{für } k > 0$$

das Resultat

$$[\mathcal{L}(f(kt))]\,(s) = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(\xi)e^{-\frac{s}{k}\xi}\,d\xi = \frac{1}{k}\,[\mathcal{L}(f(t))]\,(s/k)$$

**Beispiel 6:** Es gilt

$$[\mathcal{L}(t\cdot f(t))]\,(s) = \int_0^\infty \tau f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

und daraus folgt die Implikation

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f(t))](s) \qquad \Longrightarrow \qquad \phi'(s) = -[\mathcal{L}(t\cdot f(t))](s).$$

$\square$

## Verschiebungssätze.

**Erster Verschiebungssatz:** Es gilt der erste Verschiebungssatz

$$\left[\mathcal{L}(e^{-kt}f(t))\right](s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-(s+k)\tau}\,d\tau = [\mathcal{L}(f(t))](s+k)$$

für $\mathrm{Re}(s) > \max(\gamma_0, \gamma_0 - k)$. Mit der Rücktransformation erhält man

$$\left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t) = e^{-kt}\mathcal{L}^{-1}[(\phi(s-k))](t),$$

**Zweiter Verschiebungssatz:** Es gilt der zweite Verschiebungssatz

$$[\mathcal{L}(f(t-k))](s) = e^{-sk}[\mathcal{L}(f(t))](s).$$

□

# Faltungssatz.

**Satz:** *Für die* Faltung *(*Konvolution*)*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) \, d\tau$$

*zweier Funktionen* $f$ *und* $g$ *gilt (unter den vorigen Voraussetzungen) die Formel*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(f * g)](s) &= \int_0^\infty (f * g)(\alpha) e^{-s\tau} \, d\tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\alpha f(\tau) g(\alpha - \tau) \, d\tau \, e^{-s\alpha} \, d\alpha \end{aligned}$$

# Fortsetzung des Beweises.

Unter Vertauschung der Integrationsreihenfolge bekommt man

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(f * g)](s) &= \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau)g(\alpha-\tau)e^{-s\alpha}\,d\alpha\,d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\int_\tau^\infty g(\alpha-\tau)e^{-s(\alpha-\tau)}\,d\alpha\,d\tau\end{aligned}$$

und weiterhin (mit der Substitution $\rho = \alpha - \tau$ im zweiten Integral)

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(f * g)](s) &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\int_0^\infty g(\rho)e^{-s\rho}\,d\rho\,d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \cdot \int_0^\infty g(\rho)e^{-s\rho}\,d\rho \\ &= [\mathcal{L}(f)](s)\cdot[\mathcal{L}(g)](s)\end{aligned}$$

$\blacksquare$

# Beispiel.

Betrachte die Funktion

$$H(s) = \frac{1}{s^3(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{s^3} \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2} =: F(s) \cdot G(s)$$

Für $f(t) = t^2/2$ (Beispiel 4) und $g(t) = \sin(\omega t)/\omega$ (Beispiel 3) gilt

$$[\mathcal{L}(f)](s) = F(s) \qquad \text{und} \qquad [\mathcal{L}(g)](s) = G(s)$$

Mit dem Faltungssatz gilt daher

$$h(t) := [\mathcal{L}^{-1}(H)](t) = [\mathcal{L}^{-1}(F \cdot G)](t) = (f * g)(t)$$

und somit (unter zweifacher Verwendung partieller Integration)

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\omega} \int_0^t \tau^2 \sin(\omega(t-\tau))\, d\tau \\ &= \frac{t^2}{2\omega^2} - \frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^4}. \end{aligned}$$

$\square$