Komplexe Funktionen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

Universität Hamburg

15. April 2009

Beachtenswertes

- Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/
- Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!
- Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Kapitel 1.7: Wdh Komplexe Zahlen

Ausgangspunkt: Wir wollen alle Gleichungen der Form

$$x^2 = a \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

lösen können.
Gute Nachricht:
Für nichtnegative $a \in [0, \infty)$ gibt es stets (mindestens) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.
Schlechte Nachricht: Für negative $a \in (-\infty, 0)$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.
Beispiel: Für $a = -1$ gibt es keine reelle Zahl x mit

$$x^2 + 1 = 0.$$

Was nun? Um alle Gleichungen der Form $x^2 = a$ lösen zu können, müssen wir den Zahlbereich der reellen Zahlen erweitern. Diese `Zahlbereichserweiterung` führt uns zum `Körper der komplexen Zahlen`, $\mathbb{C}$.
Im folgenden wird die (algebraische und geometrische) Struktur von $\mathbb{C}$ diskutiert.

Kapitel 1.7: Wdh Komplexe Zahlen

Einführung der komplexen Zahlen.

Startpunkt: Verwende *symbolische Lösung* $\boldsymbol{i}$ für Gleichung $x^2 + 1 = 0$, so dass

$$i^2 = -1.$$

Die Zahl $\boldsymbol{i}$ heißt `imaginäre Einheit`.

Nächster Schritt: Mit der imaginären Einheit bildet man nun die Zahlenmenge

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dann führt man die folgenden Rechenoperationen auf $\mathbb{C}$ ein.

- **Addition:**

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2) \qquad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Multiplikation:**

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = (a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1) \text{ für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit besitzt $\mathbb{C}$ eine algebraische Struktur.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Zur Konstruktion der komplexen Zahlen.
Ausgangspunkt: Betrachte die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit
Addition

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \qquad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

und **Multiplikation**

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \qquad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

Beobachtung: Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ; weiterhin gilt

$$(a, b) \cdot (1,0) = (a, b) \qquad \text{für } (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

d.h. $(1,0) \in \mathbb{C}$ ist `neutrales Element der Multiplikation`.
Die Gleichung

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1,0) \qquad \text{für } (a, b) \neq (0,0)$$

besitzt die eindeutige Lösung, das `multiplikative Inverse` zu (a, b),

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Zur Struktur der komplexen Zahlen.

Bemerkung: Die Menge $\mathbb{R}^2$ bildet mit der Addition und Multiplikation einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen, ab sofort bezeichnet mit $\mathbb{C}$.

Beobachtung: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch $\varphi(a) = (a,0)$ ist injektiv. Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 + a_2) &= (a_1 + a_2,0) = (a_1,0) + (a_2,0) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \\ \varphi(a_1 a_2) &= (a_1 a_2,0) = (a_1,0) \cdot (a_2,0) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \end{aligned}$$

Fazit:
- Können die reellen Zahlen mit komplexen Zahlen der Form $(a,0)$ identifizieren;
- Die reellen Zahlen bilden einen Unterkörper von $\mathbb{C}$;
- Die Rechenregeln in $\mathbb{C}$ sind konsistent mit den Rechenregeln in $\mathbb{R}$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Der Körper der reellen Zahlen ist angeordnet.

Bemerkung: Die reellen Zahlen bilden einen angeordneten Körper; es gelten die folgenden Anordnungsaxiome.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $x + y > 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $xy > 0$.

Frage: Ist der Körper der komplexen Zahlen, $\mathbb{C}$, angeordnet?
Antwort: **NEIN!**
Denn in einem angeordneten Körper sind von Null verschiedene Quadratzahlen positiv. Wäre $\mathbb{C}$ angeordnet, so folgt aus

$$0 < 1^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad 0 < i^2 = -1$$

der Widerspruch $0 < 1 + (-1) = 0$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Vereinfachung der Notationen:

- Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir a statt $(a,0)$;
- Die komplexe Einheit $(0,1)$ notieren wir mit i;
- Damit lässt sich jede komplexe Zahl (a,b) schreiben als

$$(a,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = a + b\cdot i = a + ib.$$

und es gilt

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Fazit: Wir haben mit $\mathbb{C}$ einen Körper konstruiert, der $\mathbb{R}$ umfasst. Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

ist in $\mathbb{C}$ lösbar. Die einzigen beiden Lösungen lauten $\pm i$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Realteil und Imaginärteil.
Ab sofort bezeichnen wir komplexe Zahlen mit z oder w. Für

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

heißt x der `Realteil` und y der `Imaginärteil` von z, kurz

$$x = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{und} \qquad y = \mathrm{Im}(z)$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z+w) &= \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Im}(z+w) &= \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Re}(az) &= a\mathrm{Re}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R} \\
\mathrm{Im}(az) &= a\mathrm{Im}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

und weiterhin

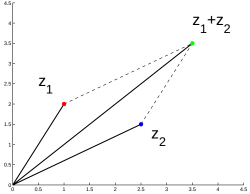
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{für } z \neq 0.$$

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Die komplexe Zahlenebene.
Geometrische Veranschaulichung: Wir stellen $\boldsymbol{z = (x, y)} \in \mathbb{C}$ als `Punkt` in der

`komplexen Zahlenebene` (`Gaußsche Zahlenebene`)

dar, gegeben durch das kartesische Koordinatensystem des $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, mit einer `reellen Achse`, $\mathbb{R}$, und einer `imaginären Achse`, $\boldsymbol{i} \cdot \mathbb{R}$.
Geometrische Veranschaulichung der Addition:
Durch übliche Addition der Ortsvektoren nach der Parallelogrammregel.



Addition zweier komplexer Zahlen.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Konjugation komplexer Zahlen.

Ordne durch Spiegelung an reeller Achse jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ mit

$$\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

konjugierte komplexe Zahl zu.

Es gelten die folgenden Rechenregeln.

$$\begin{array}{rcll}
\overline{w+z} & = & \bar{w} + \bar{z} & \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\
\overline{wz} & = & \bar{w} \cdot \bar{z} & \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\
\overline{(\bar{z})} & = & z & \text{für } z \in \mathbb{C} \\
z\bar{z} & = & x^2 + y^2 & \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Re}(z) & = & (z + \bar{z})/2 & \text{für } z \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Im}(z) & = & (z - \bar{z})/(2i) & \text{für } z \in \mathbb{C}
\end{array}$$

Insbesondere gilt $z = \bar{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Der Betrag.

Setze

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

für den Betrag von z sowie $|w - z|$ für den Abstand zweier Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene.

• Somit stellt $|z| = |z - 0|$ den euklidischen Abstand von z zum Ursprung dar.

• Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt $|z|$ mit dem (üblichen) Betrag für reelle Zahlen überein.

• Es gelten die folgenden Abschätzungen.

$$-|z| \leq \mathbf{Re}(z) \leq |z| \qquad \text{und} \qquad -|z| \leq \mathbf{Im}(z) \leq |z| \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Wir haben (vergleiche Definition von Normen)

- $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ (Dreiecksungleichung);
- $|wz| = |w| \cdot |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Die Eulersche Formel.
In der komplexen Zahlenebene gilt für

$$z = x + iy$$

mit den Polarkoordinaten

$$(x, y) = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

die Eulersche Formel

$$z = |z| \exp(i\varphi) = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \in [0,2\pi)$ für $z \neq 0$ den (eindeutigen) Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 durch $z = (x, y)$ darstellt.
Der Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$ wird ebenso als Argument von $z \neq 0$ bezeichnet, kurz

$$\varphi = \arg(z) \in [0,2\pi).$$

Beispiel: $i = (0,1) = \exp(i\pi/2)$, $-1 = i^2 = \exp(i\pi)$, somit gilt
$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$.

Zur Geometrie der Multiplikation und Division.
Mit der Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ als `Drehstreckung` in der komplexen Zahlenebene interpretieren, denn für

$$w = |w|(\cos(\psi), \sin(\psi)) \qquad \text{und} \qquad z = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

gilt

$$\begin{aligned} wz &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi) + i\sin(\psi))(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\ &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + i\sin(\psi + \varphi)) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)) \end{aligned}$$

bzw. mit der Eulerschen Formel

$$wz = |w| \cdot |z| \exp(i\psi) \cdot \exp(i\varphi) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)).$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt analog

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \exp(i(\psi - \varphi)) = \frac{|w|}{|z|}(\cos(\psi - \varphi) + i\sin(\psi - \varphi)).$$

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Potenzen und Einheitswurzeln.

Für die n-te Potenz z^n, $n \in \mathbb{N}$, von $z \in \mathbb{C}$ gilt die Darstellung

$$z^n = (|z| \exp(i\varphi))^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Die Gleichung

$$z^n = 1$$

besitzt die n paarweise verschiedenen Lösungen

$$z_k = \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n-1.$$

Diese Lösungen werden als n-te Einheitswurzeln bezeichnet.

Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen

Eine Abbildung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \; D \subset \mathbb{C},$$

welche einer komplexen Zahl $z = x + iy \in D$ eine komplexe Zahl $f(z) = u(z) + iv(z)$ zugeordnet, heißt komplexe Funktion. Dabei gilt $u(z) = \mathrm{Re} f(z)$ und $v(z) = \mathrm{Im} f(z)$. Dies sind dann reellwertige Funktionen.

Komplexe Funktionen f können auch als Abbildungen von $D \subset \mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ gemäß

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

aufgefasst werden.

Somit kann man Stetigkeit oder Grenzwert einer komplexen Funktion über die Stetigkeit oder den Grenzwert der entsprechenden Abbildung aus $D \subset \mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ erklären.

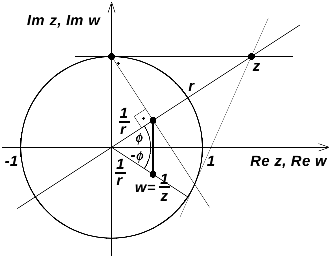
Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Bspe

1) $f(z) = \frac{1}{z}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Hier $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$.
Geometrisch in der Gauss'schen Zahlenebende:

$$z = r\,e^{i\phi} \qquad f(z) = \rho e^{i\psi} = \frac{1}{r}e^{-i\phi} = \frac{1}{z}\,,$$



Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Bspe

2) $f(z) = z^3$ mit Definitionsbereich $\mathbb{C}$:

$$f(z) = (x+iy)^3 = x^3+3x^2iy+3x(iy)^2+(iy)^3 = (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3).$$

3) $f(z) = e^z$ mit Definitionsbereich $\mathbb{C}$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y \ .$$

Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Potenzreihen

Erinnerung:

$$(z_n) = (x_n + iy_n) \to z = x + iy \text{ in } \mathbb{C} \iff (x_n, y_n) \to (x, y) \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

Dies erlaubt Übertragung von Potenzreihen ins Komplexe (vergl. Kapitel 3.6): Wir betrachten die Folge der Partialsummen

$$(s_n) = (\sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k)$$

bei gegebenen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ sowie gegebenem $z_0 \in \mathbb{C}$.
Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert (s_n)?.
Falls für $z = z_1$ Konvergenz der Folge (s_n) gegen $s' \in \mathbb{C}$ vorliegt, sagen wir, die Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

konvergiert für $z = z_1$ gegen s'. Die Reihe ist dann auch für alle z mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ konvergent, sogar absolut (Satz von Abel).

Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Potenzreihen

Folgende Fälle können auftreten:

a) $p(z)$ konvergiert nirgends (außer für $z = z_0$);

b) $p(z)$ konvergiert beständig, d.h. in der gesamten komplexen Ebene $\mathbb{C}$;

c) Es gibt eine reelle Zahl R mit $0 < R < \infty$, so dass $p(z)$ für alle z mit $|z - z_0| < R$ konvergiert, und für alle z mit $|z - z_0| > R$ divergiert. R heißt **Konvergenzradius** der Reihe und kann stets durch

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

bestimmt werden. Die Reihe ist beständig konvergent, wenn $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, d.h. $R = \infty$, ist. Die Reihe konvergiert nirgends, wenn die Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$ unbeschränkt ist, also $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty,\ R = 0$, ist.

d) $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ existent, dann $R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$.

Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Potenzreihen

$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$: $\quad R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty.$

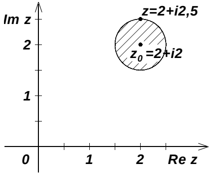
$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1}(z-(2+2i))^k$:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(2i)^k}{k+1}\right|}{\left|\frac{(2i)^{k+1}}{k+2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|2i|}\frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{2} .$$

Für den Randpunkt $z = 2 + 2{,}5i$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1}(0{,}5i)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} i^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}(-1)^k ,$$

also konvergente alternierende Reihe (Leibniz-Kriterium).



Buch Kap. 10.3 – Elementare Funktionen

Elementare Funktionen über Potenzreihen definieren:

Exponentialfunktion: $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Sinus: $\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$

Kosinus: $\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$

Hyperbelfunktionen:

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Die Exponentialfunktion

Definition: *Die* `komplexe Exponentialfunktion` $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *können wir definieren durch*

$$\exp(z) \equiv e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \qquad \text{für } z = x + iy.$$

Es gilt das Additiontheorem

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \qquad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Verhalten der komplexen Exponentialfunktion $z \to \exp(z)$:
Für $w = \exp(z)$, $z = x + iy$ und $w = u + iv$ bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

und somit

$$u = e^x\cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^x\sin(y).$$

Geometrie von $\exp z$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.
Für das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos(y_0) \\ v &= e^x \sin(y_0) \end{aligned}$$

• Für festes y_0 ergibt dies ein vom Ursprung ausgehenden Strahl,

der mit der positiven x-Achse den Winkel y_0 einschließt.
• Für Winkel y_0 und y_1, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

ergibt sich der gleiche Strahl.
• Genauer: Wegen der Periodizität von $\exp(z)$ gilt

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

Geometrie von $\exp z$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man

$$u = e^{x_0} \cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- Für festes x_0 ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius e^{x_0}.
- Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es

gibt kein Argument $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Somit gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

• **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechtecksgitter im kartesischen Koordinatensystem auf ein Netz von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.

• **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ `winkeltreu`

(bzw. `konform`). Details dazu später.

Geometrie von **exp** z

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.