Komplexe Funktionen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

8. Mai 2009

Buch Kap. 10.2 – Differentiation komplexer Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z \in D$, falls

$$f'(z) := \lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

existiert.

Satz 10.1: Sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenzierbar in $z = x + iy$. Dann besitzen die Funktionen u und v in (x, y) partielle Ableitungen $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ und es gelten die CAUCHY-RIEMANN**schen Differentialgleichungen**

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \text{ und } v_x(x, y) = -u_y(x, y). \qquad (*)$$

Für die Ableitung f' in z gilt

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y).$$

Sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in D **stetig** partiell differenzierbar und gilt $(*)$, so ist $f = u + iv$ in D komplex differenzierbar.

Buch Kap. 10.2 – Analytische Funktionen

Defintion 10.1: Komplexe Funktionen, die in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ differenzierbar sind, heißen (dort) **analytisch** oder **holomorph**. Für $D = \mathbb{C}$ heißt die Funktion ganz.

Differentiationsregeln

- $f'(z) = nz^{n-1}$ für $f(z) = z^n$
- $f'(z) = g'(z) + h'(z)$ für $f(z) = g(z) + h(z)$
- $f'(z) = g'(z)h(z) + g(z)h'(z)$ für $f(z) = g(z)h(z)$
- $f'(z) = \frac{g'(z)h(z) - g(z)h'(z)}{h^2(z)}$ für $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $h(z) \neq 0$
- $f'(z) = g'(h(z))h'(z)$ für $f(z) = g(h(z))$

Damit sind Summe, Produkt, Quotient und Verkettung analytischer Funktionen wieder analytisch.

Geometrie der komplexen Differenzierbarkeit

Sei $f : D(f) \to W(f)$ eine analytische Funktion und $z_0 \in D(f)$ ein Punkt. Weiterhin sei

$$\Gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\} \subset D(f)$$

eine Kurve, die z_0 enthält, d.h. $z_0 = \Gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Schließlich seien $x(t)$ und $y(t)$ in t_0 differenzierbar. Dann ist $z(t)$ in t_0 differenzierbar mit Ableitung

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Im folgenden setzen wir $z'(t_0) \neq 0$ voraus.
Frage: Wie verhält sich die Kurve Γ unter der Abbildung f?
Betrachte dazu das Bild

$$\Gamma^* = \{w(t) = f(z(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

mit $w_0(t_0) = f(z(t_0))$, kurz $w_0 = f(z_0)$.

Geometrische Interpretationen

Beachte: Der Tangentenvektor $w'(t_0)$ von Γ^* in w_0 berechnet sich nach der Kettenregel zu

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0).$$

Für $f'(z_0) \neq 0$ gilt dann

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)).$$

bzw.

$$\alpha^* = \alpha + \omega$$

für $\alpha^* = \arg(w'(t_0))$, $\alpha = \arg(z'(t_0))$ und $\omega = \arg(f'(z_0))$.

Geometrische Interpretationen:

- Man erhält den Tangentenvektor von Γ^* durch Drehung von Γ um Winkel ω;
- Der Drehwinkel ω hängt von f und z_0 ab, aber nicht von Γ;
- Der Tangentenvektor *jeder* Kurve durch z_0 wird durch die Abbildung f um den Winkel $\omega = \arg(f'(z_0))$ gedreht.

Winkeltreue (Konforme) Abbildungen

Definition:
Eine Abbildung $f : D(f) \rightarrow W(f)$, unter der alle Winkel (inklusive deren Orientierung) erhalten bleiben, nennt man winkeltreu bzw.konform.

Satz:
Eine analytische Funktion $f : D(f) \rightarrow W(f)$ ist in jedem Punkt $z_0 \in D(f)$ mit $f'(z_0) \neq 0$ konform.

Weiterhin gilt die folgende Umkehrung des Satzes.

Satz:
Sei $f : D(f) \rightarrow W(f)$ in $z_0 \in D(f)$ konform. Weiterhin seien Real- und Imaginärteil $u(z)$ und $v(z)$ von $f = u + iv$ in einer Umgebung von z_0 stetig differenzierbar. Dann ist f komplex differenzierbar mit $f'(z_0) \neq 0$.