150509

Sei $f(z) = u(z) + i\, v(z)$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$$

Sei f in z_0 diffbar. Dann ist das auch F in (x_0, y_0)

$$DF(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{CR DGlen}}{=} \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ -u_y(x_0,y_0) & u_x(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

<u>Beh.</u>: $v \longmapsto DF(x_0,y_0)\, v$ winkeltreu, d.h. mit v, w und $a = DF\, v$, $b = DF\, w$ gilt $\sphericalangle(v,w) = \sphericalangle(a,b)$.

(1) Orientierung der Winkel bleibt dabei erhalten

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. Dann

$$a = \begin{bmatrix} u_x v_1 + u_y v_2 \\ -u_y v_1 + u_x v_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} u_x w_1 + u_y w_2 \\ -u_y w_1 + u_x w_2 \end{bmatrix}$$

$$\cos \sphericalangle(v,w) = \frac{v^t w}{|v||w|}, \quad \cos \sphericalangle(a,b) = \frac{a^t b}{|a||b|}$$

Es gilt (nach kurzer Rechnung)

$$a^t b = (u_x^2 + u_y^2)\, v^t w$$

$$= \det DF(x_0,y_0)\, v^t w$$

Ferner $|a|^2 = \det DF(x_0,y_0)\, |v|^2$

$|b|^2 = \det DF(x_0,y_0)\, |w|^2$

$$\Rightarrow \cos \sphericalangle(a,b) = \frac{a^t b}{|a||b|} = \frac{v^t w}{|v||w|} = \cos \sphericalangle(v,w)$$

150509

Übertragen auf f: Bei z_0 gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)$$

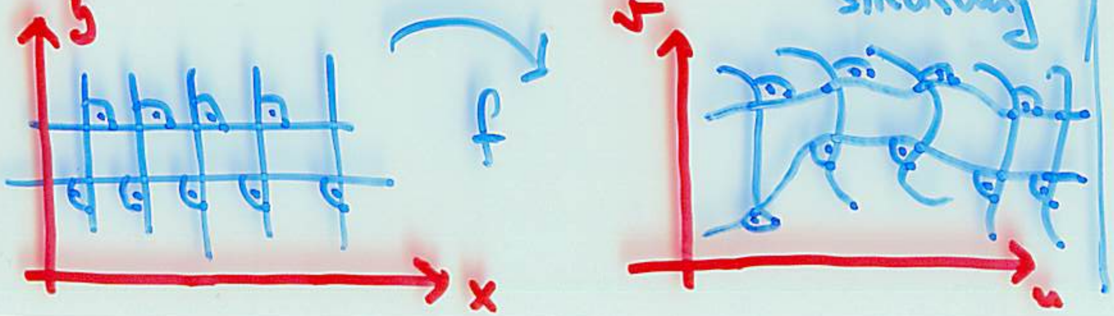
mit $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{|r(z)|}{|z - z_0|} = 0$.

Daher ist f winkeltreu, denn

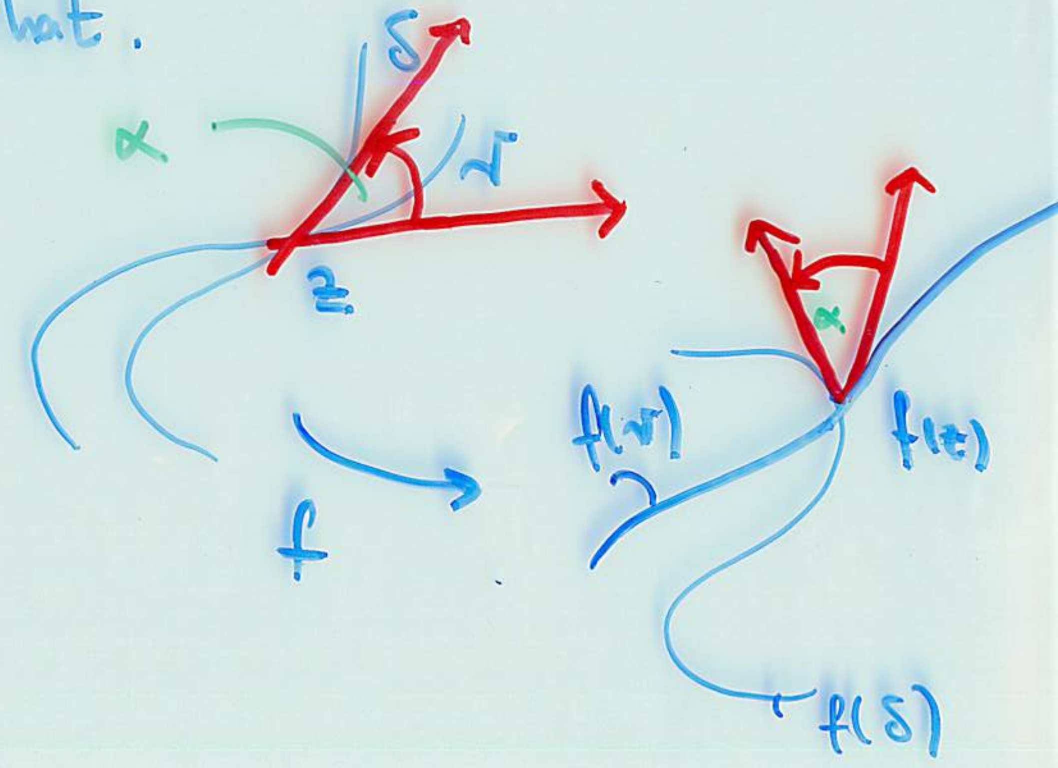
$$f'(z_0) \sim DF(x_0, y_0)$$

und lokal (mit Modell erster Ordnung)

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) - f'(z_0)\, z_0}_{\text{Translation}} + \underbrace{f'(z)\, z}_{\text{Dreh-streckung}}$$



(2) Def.: $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ heißt konform (winkel- und orientierungstreu), falls der Schnittwinkel zweier durch $z \in G$ verlaufender Kurven mit dem der Bildkurven in $f(z)$ übereinstimmt und dieselbe Orientierung hat.



150509

Satz: Ist $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f'(z) \neq 0$ in G, so ist f konform in G.

Folgerung: Ist $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ analytisch, $f'(z) \neq 0$ in G. Dann sind die Bilder der Geraden

$$\operatorname{Im} z = const_1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} z = const_2$$

orthogonal und die Niveaulinien

$$\operatorname{Im} f(z) = const_1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} f(z) = const_2$$

ebenso.

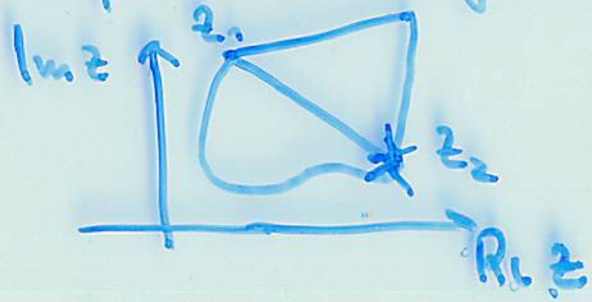
③ Integration komplexer Funktionen

$g: [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetige Funktion (Kurve), d.h. es gibt Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ mit $g|_{[t_i, t_{i+1})}$ stetig.

Dann

$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t)\,dt$$

Integration in $\mathbb{C}$ von z_1 nach z_2 auf vielen Wegen möglich



150509

Def.: i) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ heißt Kurve in der komplexen Ebene

$$\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$$

ii) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ Kurve, die zudem stückweise diffbar sei. Dann heißt γ Integrationsweg von

$$A = \gamma(a) \text{ nach } B = \gamma(b),$$

nachfolgend kurz Weg.

iii) $\mathcal{C} := \{ z \in \mathbb{C} ;\ z = \gamma(t),\ t \in [a,b] \}$

Bild der Kurve γ in $\mathbb{C}$.

(4)

Def.: $f : \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ stetig, G Gebiet und $\mathcal{C}$ Weg von A nach B.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt \in \mathbb{C}$$

Kurvenintegral von f längs $\mathcal{C}$

Bsp.: i) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$, $\dot{\gamma}(t) = i r e^{it}$

$f(z) := \frac{1}{z - z_0} \Rightarrow f(\gamma(t)) = \frac{1}{r e^{it}}$

Damit

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r e^{it}}\, i r e^{it}\,dt$$

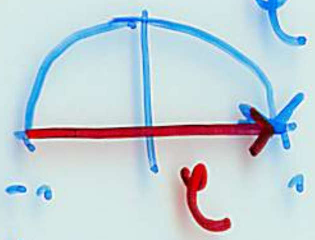
$$= 2\pi i \quad \text{unabhängig von } r$$

Kurvenintegral längs Kreis um z_0 mit Radius r

150509

i) α) $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := e^{i(\pi - t)}$

$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = -i\, e^{i(\pi - t)}$.



$f(z) = |z|$

$\Rightarrow f(\gamma(t)) = |e^{i(\pi - t)}| = 1$

Also

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_0^\pi -i\, e^{i(\pi - t)}\,dt$$

$$= \int_0^\pi \dot{\gamma}(t)\,dt = \gamma(\pi) - \gamma(0) = 2$$

ii) β) $\underline{\mathcal{C}} = [-1, 1] \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t$,

$\dot{\gamma}(t) = 1$;

$$\int_{\mathcal{C}} |z|\,dz = \int_{-1}^1 |t|\,dt = 1 \neq 2$$

⑤ D.h. Kurvenintegral i.d.R. abhängig vom durchlaufenen Weg und nicht nur von den Werten in den Endpunkten.

Rechenregeln $a, b \in \mathbb{C}$

i) $$\int_{\mathcal{C}} a f(z) + b g(z)\,dz = a \int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz + b \int_{\mathcal{C}} g(z)\,dz$$

ii) $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{C}_i$

$$\rightarrow \int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}_j} f(z)\,dz$$

iii) $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = -\int_{\mathcal{C}^*} f(z)\,dz$,

wobei $\mathcal{C}^*$ bzgl. Durchlaufrichtung umgekehrt

150505

Weg zu γ sei.

iv.) $\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \text{Länge}(\gamma) \cdot \max_{z\in\gamma} |f(z)|$

Def.: (Stammfunktion)

$f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ stetig.

$F: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion zu f, falls F analytisch ist auf G und

$$F'(z) = f(z) \quad \forall_{z\in G}$$

gilt.

(6) **Satz** $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ besitze Stammfunktion F. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(B) - F(A)$$

$\forall_\gamma : \gamma(a) = A,\ \gamma(b) = B.$

Bew.: $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$

$= \int_a^b F'(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$

$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt$

$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(B) - F(A).$

D.h. Integration ist weg-unabhängig.