

290509

Folgerungen aus Cauchy-Integral  
Formel

i)  $f$  analytisch in  $G \rightarrow f$   $\infty$ -oft  
diffbar (s. Formel für  $f^{(k)}(z_0)$ )

ii) Mittelwert Eigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

$$\gamma(t) = z_0 + r e^{it} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt$$

Mittelwert von  $f$  auf  
 $\partial K_r(z_0)$

iii) Maximum Prinzip: Sei  $f$  analytisch  
auf  $G$ . Ferner gebe es  $z_0 \in G$

① mit

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in G$$

$\Rightarrow f$  in  $G$  konstant Mittelwert Eigensch.

Bew Idee:  $M := |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})| dt$

$\neg$ :  $f$  nicht konstant auf  $\overline{K_r(z_0)}$

und  $|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in G$ . Dann

$$M \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})| dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi-\varepsilon} |f(z_0 + r e^{it})| dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})| dt$$

$\leq M$

$$\leq \frac{2\pi-\varepsilon}{2\pi} M + 1 - 1$$

$$< \frac{2\pi-\varepsilon}{2\pi} M + \frac{2\pi-(2\pi-\varepsilon)}{2\pi} M = M \quad \downarrow$$



→  $|f|$  auf  $K_r(z_0)$  konstant

Argumentiere mit "Krischke'scher Verfahren",  
dass  $|f|$  auf  $G$  konstant und  
mit Hilfe CR-Deriv. daß  $f$  konstant  
↳ Übung.

Folgerungen aus Max Prinzip

i.)  $f$  analytisch in  $b$ , stetig auf  
 $\bar{G}$  und nicht konstant. Dann  
nimmt  $|f|$  auf  $\partial G$  seinen maxi-  
malen Wert an.

Max Prinzip  
 $\forall: |f(z_0)|$  maximal in  $G \rightarrow |f|$  konstant

②

ii) Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom (über  $\mathbb{C}$ ) mit Grad  $n \geq 1$   
besitzt mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$

Nachweis:  $\forall p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

→  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$  analytisch in  $\mathbb{C}$

Dann  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n z^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n})|}$$

$$= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n z^n|} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n}|}$$

$$= 0.$$

→  $\exists z_0 \in \mathbb{C} : |f(z_0)|$  maximal

$\mathbb{C} = G$   
 →  $|f|$  konstant →  $p$  konstant

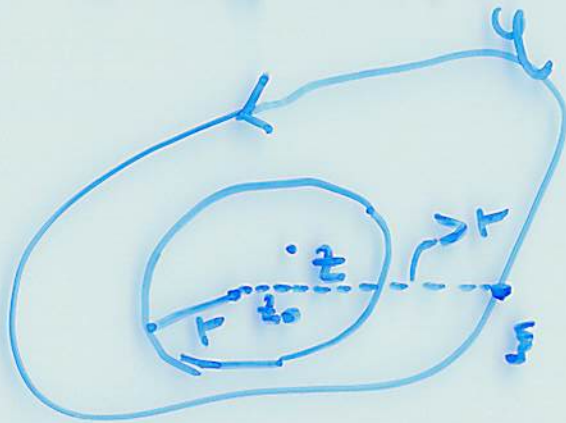


290509

## Taylor Formel

$f$  analytisch in  $G$ ,  $\gamma$  Weg in  $G$ , der  $z \in G$  umläuft

$$\underbrace{\left| \frac{z-z_0}{s-z_0} \right|}_{=: \rho} < 1 \quad (*)$$



Wir haben mit Cauchy Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{s-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

Es gilt mit  $(*)$ :

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^n$$

(3) Einsetzen liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}} ds$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds}_{= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Satz: Sei  $f$  analytisch in  $G$ ,  $z_0 \in G$   
Dann gilt für jeden Kreis  $K_r(z_0) \subset G$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \forall z \in K_r(z_0)$$



290509

Bsp: i)  $f(z) = e^z$ ,  $z_0 = 0$ 

$$f^{(n)}(z) = e^z, \quad e^0 = 1 \quad \rightarrow$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ii)  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  analytisch in  $K_r(0)$ .

$$\text{Dort } f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad |z| < 1$$

Folgerungen: i)  $f$  analytisch in  $G$ , $K_r(z_0) \subset G$ . Dann mit

$$M(r) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \quad \text{und}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

$$\textcircled{4} \quad |c_n| = \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nachweis mit Cauchy Integralformel

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{|f(s)|}{|s-z_0|^{n+1}} ds$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$

ii) Satz von Liouville:  $f$  analytisch in  $\mathbb{C}$  und beschränkt, so ist  $f$  konstant auf ganz  $\mathbb{C}$ .

$$\text{Nachweis: } |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \rightarrow$$

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad n \geq 1$$

29.5.09

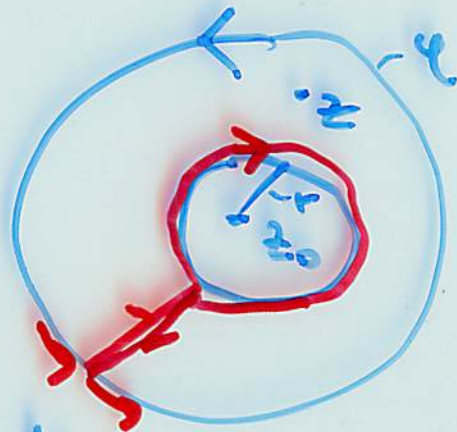
Damit  $c_1 = 0 \quad \forall n \geq 1$

$\rightarrow f(z) = c_0 \equiv \text{konstant}$

Beschreibung analytischer Funktionen  
in der Nähe von Singularitäten

Sei  $f$  in  $G \setminus \{z_0\}$  analytisch,  
entw. versch.  
 $\gamma$  sei positiv orientierter Kreis um  
 $z_0$ .

Damit



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma \cup \partial K_r(z_0)^*} \frac{f(s)}{s-z} ds =$$

⑤

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

$\hookrightarrow$  Laurent Reihenentwicklung