030709

Nachtrag: $R(a,b)$ gebrochen rationale Funktion. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$

$$= 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right), z_k\right),$$

z_k Singularitäten von R.

Bsp zu Satz 10.15

ϕ harmonisch und χ mit

$\nabla \chi = \begin{bmatrix} -\phi_y \\ \phi_x \end{bmatrix}$. Dann

$f(z) = \phi + i\chi$ analytisch

(1)

z. Bsp. $\phi(x,y) = x^2 - y^2$. Dann

$\Delta \phi = 0$. χ aus

$$\nabla \chi = \begin{bmatrix} -\phi_y \\ \phi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix}$$

$\to$ $\chi(x,y) = 2xy + c(y)$ und $\chi(x,y) = 2xy + d(x)$ $\forall x,y$

$\to$ $c(y) = d(x)$ $\forall x,y$, also

$c = d = \text{konst}$

Wähle konst $= 0$. Dann

$$f(z) = f(x+iy) = \phi(x,y) + i\chi(x,y)$$
$$= x^2 - y^2 + i\,2xy$$
$$= z^2$$

030709

Komplexes Strömungspotential

Sei $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ Geschwindigkeitsfeld einer ebenen Strömung, in komplexer Form

$$v(z) = v(x+iy) = v_1(x,y) + i\, v_2(x,y)$$

<u>Def.</u>: Gibt es ϕ mit $\nabla\phi = v$ und ist $f(z) = \phi + i\chi$ harmonisch, wobei χ durch

$$\nabla\chi = \begin{bmatrix} -\phi_y \\ \phi_x \end{bmatrix}$$ bestimmt ist,

so heißt f komplexes Strömungspotential von v. ϕ heißt Geschwindigkeitspotential, χ heißt Stromfunktion von v.

②

Charakterisiere v, falls f komplexes Strömungspotential zu v:

$$f(z) = f(x+iy) = \phi(x,y) + i\chi(x,y)$$

<u>und</u> $v = \nabla\phi$.

i.) $\operatorname{div} v = \operatorname{div}\nabla\phi = \Delta\phi = 0$

d.h. v quellenfrei, Fluid ist inkompressibel

ii) $\operatorname{rot} v = v_{1y} - v_{2x} = \phi_{xy} - \phi_{yx} = 0$,

d.h. v ist wirbelfrei

030709

Stelle Verbindung von $v = v_1 + i v_2$ und $f'(z)$ her;

$$f'(z) = \phi_x + i \chi_x \overset{\text{CRDGL}}{=} \phi_x - i \phi_y = v_1 - i v_2 \qquad v = \nabla \phi$$

$$\rightarrow \quad v(z) = \overline{f'(z)}$$

Bestimme Zirkulation von v entlang geschlossener Kurve γ in Termen von f

$$Z = \int_\gamma v \cdot dx = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b v_1(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_1(t) + v_2(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_2(t)\, dt$$

$$\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

(3)

Fluß von v durch γ

$$W = \int_\gamma v \cdot d\sigma = \int_\gamma (v \cdot \eta)\, d\sigma$$

η äussere Normale an γ

$$= \int_a^b (v \cdot \eta)(\gamma(t))\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

?

$$\eta = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_2 \\ -\dot{\gamma}_1 \end{bmatrix} \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \qquad = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{bmatrix} \cancel{\frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} |\dot{\gamma}(t)|}\, dt$$

$$\Rightarrow$$

$$W = \int_a^b v_1(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_2(t) - v_2(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_1(t)\, dt$$

Wie hängen Z und W mit f zusammen?

Betrachte

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = \int_\gamma v_1 - i v_2\, dz$$

030709

$$= \int_a^b (v_1(\gamma(t)) - i\, v_2(\gamma(t))) \cdot (\dot{\gamma}_1(t) + i\,\dot{\gamma}_2(t))\, dt$$

$$= \int_a^b v_1(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_1(t) + v_2(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_2(t)\, dt$$

$$+\, i \int_a^b v_1(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_2(t) - v_2(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_1(t)\, dt$$

$$= Z + i\, W$$

<u>Merke</u>: Ist $f = \phi + i\chi$ komplexes <u>Strömungspotential</u> zu v, so gilt

$$v(z) = \overline{f'(z)},$$

Zirkulation $Z = \mathrm{Re} \int_\gamma f'(z)\, dz$

Fluß durch γ, $W = \mathrm{Im} \int_\gamma f'(z)\, dz$

④

Hilfsaussagen über Verkettung von Funktionen mit analytischen Funktionen

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diffbar (hinreichend oft)

<u>Def.</u>: $\nabla \phi = \phi_x + i\,\phi_y$ komplexer Gradient von ϕ

Sei $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ analytisch und

$$\chi(u,v) := \phi(f(z))$$

Dann

$$\nabla \chi(u,v) \cdot \overline{f'(z)} = \nabla \phi$$

03 07 09

Nachweis:

$$\phi_x = \chi_u u_x + \chi_v v_x$$

$$\phi_y = \chi_u u_y + \chi_v v_y$$

$$\Rightarrow \nabla\phi = \chi_u(u_x + i \overbrace{u_y}^{-v_x}) + \chi_v(v_x + i \underbrace{v_y}_{=u_x})$$

$$= \underbrace{(\chi_u + i\chi_v)}_{\nabla\chi} \underbrace{(u_x - i v_x)}_{f'(z)} \quad \checkmark$$

Es gilt auch

$$\boxed{\Delta\phi = \Delta\chi(u,v)\, |f'(z)|^2}$$

Nachweis wie oben

(5)

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy}$$

Kettenregel

$$= \chi_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2\chi_{uv}\overbrace{(u_x v_x + u_y v_y)}^{=0}$$

$$+ \chi_u \underbrace{(u_{xx} + u_{yy})}_{=0} + \chi_v \underbrace{(v_{xx} + v_{yy})}_{=0}$$

$$+ \chi_{vv}(v_x^2 + v_y^2)$$

$$= \Delta\chi\, |f'(z)|^2$$

Folgerung: ϕ harmonisch, f analytisch

$\Rightarrow \chi := \phi \circ f$ harmonisch.

auf komplizierten Gebieten

Anwendung: Bestimmung harmonischer Funktion…