

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1:

- a) Zeigen Sie, dass alle 19 (warum nicht 20?) Lösungen der Gleichung

$$(z - 4)^{20} = z^{20}$$

auf der Geraden $\operatorname{Re}(z) = 2$ liegen.

- b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z - 1)^i = z^i$?

- c) Was ist falsch an folgender Argumentation von Johann Bernoulli:

$$(-z)^2 = z^2 \iff \operatorname{Log}((-z)^2) = \operatorname{Log}(z^2)$$

$$2 \operatorname{Log}(-z) = 2 \operatorname{Log}(z) \iff \operatorname{Log}(-z) = \operatorname{Log}(z) ?$$

- d) Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $\operatorname{Log}(-z) \neq \operatorname{Log}(z)$ gilt.

Aufgabe 2:

Geben Sie eine Funktionsvorschrift $f : M \rightarrow S$, $z \mapsto f(z)$ an, die

$$M := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R, \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

für ein festes $R \in \mathbb{R}^+$ so auf den Halbstreifen

$$S := \{z \in \mathbb{C}; -1 < \operatorname{Re}(z) < 1, \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$$

abbildet, dass die Symmetrie des Urbildes bzgl. der reellen Achse in eine Symmetrie des Bildes bzgl. der imaginären Achse übergeht und $f(R) = i$ gilt.

Aufgabe 3)

Gegeben sei die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ abhängige Abbildung

$$T_\alpha : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad T_\alpha(z) := \frac{(1+i)z + (i-1)}{-\alpha z + i}.$$

- Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist T_α eine Möbiustransformation?
- Welches ist das Bild der imaginären Achse unter T_1 ?
- Welches ist das Bild der reellen Achse unter T_1 ?
- Welches ist das Bild des Einheitskreises $|z| = 1$ unter T_1 ?
- Auf welche Menge wird dann die halbe Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ und } |z| < 1\}$$

durch T_1 abgebildet? Fertigen Sie dazu eine Skizze der Bildebene an!

Aufgabe 4: Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ konstant und die vom Parameter a abhängige Abbildung T_a wie folgt definiert.

$$T_a : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad T_a(z) := \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}.$$

- Zeigen Sie, dass $T_a(T_a(z)) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt.
- Bestimmen Sie das Bild des Einheitskreises $|z| = 1$ unter T_a ?
- Zeigen Sie, dass für $|a| < 1$ die Kreisscheibe mit Radius Eins um Null

$$K_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

auf sich abgebildet wird.

Abgabetermine: 13/14.5.09