Department Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

a) Es sei C der einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Einheitskreis $|z| = 1$.

(i) Berechnen Sie $\displaystyle\int_C \frac{1}{(e^z - i)}\, dz$.

(ii) Für eine auf $\mathbb{C}$ analytische Funktion gelte $|\,f(z)\,| = 4$ überall auf der Kurve C und $f(0) = 4i$. Wie muss dann f aussehen?

b) Sei C eine einfach geschlossene (d.h. Außer im Anfangs– und Endpunkt gilt $C(t_1) = C(t_2) \Longrightarrow t_1 = t_2$) stückweise C^1 Kurve. Wann ist das Integral

$$I(C) := \int_C \frac{z}{z^2+1}\, dz$$

definiert?
Wieviele verschiedene Werte kann das Integral annehmen, wenn es definiert ist?

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Die Kurven sollen, wenn nichts anderes angegeben ist, einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{e^z}{z}\, dz \qquad k = 1,2 \quad C_1 \,:\, |z| = 1, \quad C_2 : |z-2| = 1\,,$

b) $\displaystyle\int_C \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) dz \qquad C \,:\,$ der im Uhrzeigersinn durchlaufene Rand des Quadrats

$$\{z \in \mathbb{C} : \, z = x + iy : |x|,\, |y| \, < 1\},$$

c) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{e^z}{(z-2i)^5}\, dz \qquad k = 1,2 \qquad C_1 \,:\, |z-1| = 2, \quad C_2 : |z-i| = 2\,,$

d) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cos(z)}{z^{4k+1}}\, dz \qquad C \,:\, |z| = 1\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,,$

e) $\displaystyle\int_C \frac{e^{\pi z}}{z^3 - iz^2}\, dz \qquad C \,:\, |z| = 2\,,$

Aufgabe 3:

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(z) := \frac{e^z - 1}{e^z + e^{-z}}\,, \qquad g(z) := \frac{1}{\mathrm{Log}(3-z)}\,.$$

Bestimmen Sie (ohne die Reihen zu berechnen) die Radien der größten Kreise um Null, in denen die Taylorreihen von f bzw. g mit Entwicklungspunkt Null gegen f bzw. g konvergieren,

b) Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2 - 4z + 13)}$ soll so in eine Taylorreihe, die gegen f konvergiert, entwickelt werden, dass der Konvergenzkreis ein reelles Intervall $(0, b)$ mit möglichst großem b enthält. Wie muss der Entwicklungspunkt gewählt werden?

Aufgabe 4: Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils diejenige Laurentreihe zum Entwicklungspunkt z_0, die im Punkt $z = 3$ gegen $f(3)$ konvergiert.

a) $f(z) = z^2 \sin(\frac{1}{z})\,, \qquad z_0 = 0\,,$ *Hinweis : Sinusreihe*

b) $f(z) = \dfrac{(z+3)^2}{z^2 + 6z + 8}\,, \qquad z_0 = 0\,,$ *Hinweis : Partialbruchzerlegung,*

c) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2i)^3}\,, \qquad z_0 = i\,,$ *Hinweis : Bestimmen sie erst die Reihe zu* $\dfrac{1}{z+2i}$

Abgabetermine: 24./25.06.09