Department Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5

Aufgabe 1: Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen.

$$\textbf{a)}\ f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \textbf{b)}\ f(z) = \frac{z^2+1}{z^2+z-2},$$

$$\textbf{c)}\ f(z) = \frac{1}{(z-i)^3}, \qquad \textbf{d)}\ f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2(1-z^2)}.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und berechnen Sie die angegebenen Integrale mit Hilfe des Residuensatzes. Die Kreise sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $f(z) = \dfrac{2z^3+3z^2+2z+1}{z^3+z^4}$, $\qquad \displaystyle\int_{|z|=\pi/2} f(z) = \ ?$

b) $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$, $\qquad \displaystyle\int_{|z|=\pi} g(z) = \ ?$

Aufgabe 3) (Klausur 2007 Oberle/Kiani) Gegeben sei

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f und geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

c) Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz$, $\qquad C_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_1(t) = e^{it}$,

(ii) $\displaystyle\oint_{C_2} f(z)\,dz$, $\qquad C_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = (-1+i) + e^{it}$,

(iii) $\int_0^\infty \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+2x^2+2x}\,dx$.
Geben Sie das Ergebnis für das letzte (reelle) Integral auch in kartesichen Koordinaten an.

Aufgabe 4: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuenkalküls die folgenden Integrale bzw. deren Cauchysche Hauptwerte.

a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2\varphi}\,d\varphi$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin(\omega x)}{x^2+4}\,dx \qquad \omega > 0.$

Abgabetermine: 8. bzw. 9.7.