Aufgabe 1)

a) Sei i die imaginäre Einheit und R das Rechteck

$$R := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = x + iy,\, x \in (0,2),\, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\} .$$

Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad f(z) := i \cdot e^z$$

und fertigen Sie eine Skizze des Bildes an.

b) Es seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ fest vorgegeben. Welche der folgenden Gebiete können mittels **einer** Möbiustransformation auf einen Sektor der Form

$$S := \left\{ w \in \mathbb{C} : w = r\,e^{i\phi},\, r \in \mathbb{R}^+,\, -\pi < \varphi_1 < \phi < \varphi_2 < \pi \right\}$$

abgebildet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

(i)
$$G_1 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < |z| < \beta \} .$$

(ii)
$$G_2 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < \mathrm{Re}\,(z) < \beta \} .$$

(iii)
$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \alpha| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha|\,,\, |z - \beta| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha| \right\} .$$

Hinweis : Sie brauchen keine konkrete Transformation anzugeben.

Aufgabe 2)

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(\omega x)}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx\,, \quad \omega \in \mathbb{R}^+.$

b) Gegeben sei $\displaystyle f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 5}\,.$

(i) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie

$$\oint_C f(z)\,dz\,, \qquad C : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\, C(t) = (2+2i) + 2\,e^{-it}.$$

(iii) Bestimmen Sie diejenige Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2 + i$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 2$ gegen $f(2)$ konvergiert.