Aufgabe 1:

a) (i) Für die Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3i| = 2\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+3i| = 2\}$ berechne man die Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

(ii) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(i\sqrt{5}) = 0\,, \quad T(-i\sqrt{5}) = \infty \quad \text{und} \quad T(i) = 1\,.$$

(iii) Zur imaginären Achse und den Kreisen K_1 und K_2 bestimme man die (verallgemeinerten) Bildkreise unter T, gegebenenfalls mit ihren Radien.

b) Die Kurve c läuft längs des Ursprungskreises vom Radius π in mathematisch positivem Sinn und verbindet dabei die Punkte $i\pi$ und $-\pi$. Man berechne

$$\int_c \sin z \cos z \, dz$$

und gebe das Ergebnis in kartesischen Koordinaten an.

c) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz\,.$

Aufgabe 2:
Gegeben sei die durch

$$f(z) = \frac{3z-2}{z^2-2z}$$

definierte Funktion.

a) Man bestimme und klassifiziere alle Singularitäten von f und berechne die zugehörigen Residuen.

b) Für die positiv orientierten Kurven bestimme man

(i) $\displaystyle\oint_{|z|=1} f(z)\, dz,$

(ii) $\displaystyle\oint_{|z|=3} f(z)\, dz.$

c) Man gebe die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

d) Zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ gebe man alle Potenzreihenentwicklungen von f mit Konvergenzgebiet an.