Aufgabe 1:

a) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(0) = 1\,, \quad T(2) = -1 \quad \text{und} \quad T(1+i) = i\,.$$

b) Gegeben sei die Funktion

$$v(x,y) = y - 2xy - \sin x \sinh y.$$

(i) Man zeige, dass v harmonisch ist.

(ii) Zu $v(x,y)$ bestimme man eine Funktion $u(x,y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

(iii) Ist $u(x,y)$ harmonisch?

c) Die Kurve c verbindet auf geradlinigem Weg die Punkte $-i$ und 1. Man berechne

$$\int_c z \ln z \, dz$$

und gebe das Ergebnis in kartesischen Koordinaten an.

d) Für die positiv orientierte Kurve $c:\ |z-2| = 1$ berechne man

$$\oint_c \sin z + \frac{\ln z}{(z-2)^2}\, dz\,.$$

Aufgabe 2:

a) Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} \sin\left(\frac{1}{z-\pi}\right)$$

berechne man zum Entwicklungspunkt $z_0 = \pi$ in der punktierten Kreisscheibe $0 < |z-\pi| < \pi$ Haupt- und Nebenteil der Laurententwicklung.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g(z) = \frac{2}{z^2 - 6z + 10}\,.$$

(i) Man bestimme und klassifiziere alle Singularitäten von g und berechne die zugehörigen Residuen.

(ii) Man gebe die komplexe Partialbruchzerlegung von g an.

(iii) Für die positiv orientierte Kurve $c:\ |z-(3-i)| = 1$ berechne man

$$\oint_c g(z)\, dz\,.$$

(iv) Unter Verwendung des Residuenkalküls berechne man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2 - 6x + 10}\, dx\,.$$