Komplexe Funktionen für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Department Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Sommersemester 2010

nach Vorlage von Jens Struckmeier (SS 2003)

Kapitel 1: Funktionen einer komplexen Variablen

1.0 Wiederholung: Komplexe Zahlen

Zahlenbereichserweiterung des $\mathbb{R}$:
Die Gleichung

$$x^2 = a$$

soll für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Lösung besitzen.
Komplexe Zahl

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Die **imaginäre Einheit** i ist die Lösung von

$$x^2 = -1$$

Bemerke: Die zweite Lösung dieser Gleichung ist $-i$.

Definition:

Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

Geometrisch: komplexe Zahlenebene oder Gaußsche Zahlenebene.

Definition:

Operationen auf dem Körper $\mathbb{C}$:

1) **Addition**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2) **Multiplikation**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Definition:

1) Die **konjugiert komplexe Zahl** zu z ist gegeben durch

$$\bar{z} := x - iy$$

2) Die **Norm** einer komplexen Zahl z ist gegeben durch

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

3) **Division:** Es gilt

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Darstellung in Polarkoordinaten:

Eine komplexe Zahl z läßt sich in der Form

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

darstellen.
Dabei ist $r = |z|$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ das Argument.

Multiplikation:
Beträge werden multipliziert, Argumente addiert

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Division:
Beträge werden dividiert, Argumente subtrahiert

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Aus der Multiplikationsregel in Polardarstellung folgt:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Formel von Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Die Einheitswurzeln:

Es gibt n paarweise verschiedene Lösungen $z_0, \ldots, z_{n-1}$ der Gleichung

$$z^n = 1$$

nämlich

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

1.1 Grundlegende Begriffe

Eine komplexe Funktion $w = f(z)$ ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$.
Die Menge D ist der Definitionsbereich von f. Die Menge

$$W = f(D) = \{f(z) \,:\, z \in D\}$$

der Bild– oder Wertebereich.
Wir schreiben:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ w &= u + iv \\ u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}$$

Veranschaulichung: Bilder von **Koordinatennetzen**

Beispiele elementarer komplexer Funktionen

1) Lineare Funktionen

Lineare komplexe Funktionen sind gegeben durch

$$w = f(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

Jede lineare Funktion läßt sich folgendermaßen aufspalten:

$$f(z) = |a| e^{i\varphi_a} z + b = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$$

Dabei ist

$$f_1(z) = e^{i\varphi_a} \cdot z \qquad \text{eine Drehung um den Winkel } \varphi_a$$

$$f_2(z) = |a| \cdot z \qquad \text{eine Streckung um den Faktor } |a|$$

$$f_3(z) = z + b \qquad \text{eine Verschiebung um den Vektor } b$$

Also: eine lineare Abbildung ist eine Drehstreckung mit Verschiebung

2) Quadratische Funktionen

Quadratische komplexe Funktionen sind gegeben durch

$$w = f(z) = az^2 + bz + c, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

Aufspaltung:

$$f(z) = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$$

mit

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + \frac{b}{2a} && \text{Verschiebung} \\ f_2(z) &= z^2 && \text{Quadrat} \\ f_3(z) &= a \cdot z && \text{Drehstreckung} \\ f_4(z) &= z - \frac{b^2}{4a} + c && \text{Verschiebung} \end{aligned}$$

Frage: Wie läßt sich $w = f(z) = z^2$ veranschaulichen?

$$\begin{aligned} w &= z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \\ &\Rightarrow u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \end{aligned}$$

a) Betrachte Urbilder mit $y = y_0 =$ const, d.h. $u = x^2 - y_0^2, v = 2xy_0$.

1. Fall: $y_0 = 0 \Rightarrow$

$$u = x^2, \quad v = 0$$

Nicht–negative u–Achse, doppelt durchlaufen!

2. Fall: $y_0 \neq 0 \Rightarrow$

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 4y_0^2(u + y_0^2)$$

Nach rechts geöffnete Parabeln mit gemeinsamen Brennpunkt im Ursprung. Für y_0 und $-y_0$ ergibt sich die gleiche Parabel, allerdings anders durchlaufen

b) Betrachte Urbilder mit $x = x_0 = \text{const}$, d.h. $u = x_0^2 - y^2, v = 2x_0 y$.

1. Fall: $x_0 = 0 \Rightarrow$

$$u = -y^2, \quad v = 0$$

Nicht–positive u–Achse, doppelt durchlaufen!

2. Fall: $x_0 \neq 0 \Rightarrow$

$$u = -\frac{v^2}{4x_0^2} + x_0^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = -4x_0^2(u - x_0^2)$$

Nach links geöffnete Parabeln mit gemeinsamen Brennpunkt im Ursprung. Für x_0 und $-x_0$ ergibt sich die gleiche Parabel, allerdings anders durchlaufen.

Fazit: Fall b) liefert die gleiche Parabelschar wie a), allerdings an der v–Achse gespiegelt, d.h. nach links geöffnet.

3) Die Exponentialfunktion

Die komplexe Exponentialfunktion ist definiert durch

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Damit ist

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y$$

a) Sei $y = y_0 = \text{const}$, dann gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} u & = & e^x \cos y_0 \\ v & = & e^x \sin y_0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad v = cu$$

Dies sind vom Ursprung ausgehende Strahlen (Halbstrahlen).

b) Sei $x = x_0 = \text{const}$, dann gilt

$$u = e^{x_0} \cos y, \qquad v = e^{x_0} \sin y$$

Dies sind Kreise um den Ursprung mit Radius e^{x_0}. Da $y \in \mathbb{R}$ werden die Kreise unendlich oft durchlaufen.

Die Umkehrfunktion

Eine Umkehrfunktion existiert, falls $f(z)$ auf D **injektiv** ist.

Beispiel: (Wurzel = Umkehrfunktion von $w = z^2$)

Die Funktion $w = f(z) = z^2$ ist auf $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ injektiv.
Der Bildbereich ist gegeben durch

$$W = \{w \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\, z \neq 0 \vee \mathrm{Re}\, z > 0\}$$

Wir definieren die Umkehrfunktion von $w = z^2$ folgendermaßen

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

wobei

$$z = re^{i\varphi}, \qquad r > 0, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

Man nennt $f^{-1}(z)$ den **Hauptwert der Wurzel**.
Man beachte dabei den Unterschied zu

$$\sqrt{z} := \{w \in \mathbb{C} \,:\, w^2 = z\}$$

Der komplexe Logarithmus

Es gilt:

$$e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$$

und

$$z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Setzen wir nun $e^w = z$, so folgt mit den obigen Beziehungen

$$e^u = |z| \quad \wedge \quad v = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Die Menge der Lösungen w mit $e^w = z$, $z \in \mathbb{C}$ ist daher gegeben durch

$$\mathcal{L}og\, z := \{\ln|z| + i\,(\arg z + 2\pi k)\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Diese **Menge** nennt man den **komplexen Logarithmus** und ist für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, definiert.

Damit für die Exponentialfunktion $w = e^z$ eine **Umkehrfunktion** existiert, muß man den **Definitionsbereich** von e^z einschränken:

Wir definieren als die Menge S, den **Streifen** in der komplexen Ebene

$$S := \{z \in \mathbb{C} \,:\, -\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi\}$$

Dann ist die Exponentialfunktion auf S injektiv mit Bildbereich

$$W = \{w \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\, w \neq 0 \vee \mathrm{Re}\, w > 0\}$$

Die Umkehrabbildung auf S ist gegeben durch

$$\ln z := \ln |z| + i \arg z, \; -\pi < \arg z < \pi$$

Man nennt die Abbildung den

Hauptwert des komplexen Logarithmus

Die Joukowski–Funktion

Wir betrachten die komplexe Funktion $w = f(z)$ definiert durch

$$w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Offensichtlich gilt:

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

Es genügt daher eigentlich, den Bereich $|z| \geq 1$ zu untersuchen.

Wir schreiben nun die komplexe Zahl z in Polardarstellung

$$z = re^{i\varphi}$$

mit $r \geq 1$ und

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

a): Sei $r = r_0 = \text{const}$, dann folgt

$$w = \frac{1}{2}\left(r_0\, e^{i\varphi} + \frac{1}{r_0}\, e^{-i\varphi}\right)$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \cos\varphi \\ v &= \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right) \sin\varphi \end{aligned}$$

1. Fall: Sei $r_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \cos\varphi,\ v = 0.$

Dies ist mit $0 \le \varphi \le 2\pi$ die doppelt durchlaufene Strecke $[-1, 1]$.

2. Fall: Für $r_0 > 1$ ergibt sich die Parameterdarstellung einer **Ellipse**

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$$

b): Sei $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, dann folgt mit $0 < r < \infty$ (**!**)

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos\varphi_0 \\ v &= \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\varphi_0 \end{aligned}$$

1. Fall: Für $\varphi_0 = 0$ gilt

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \qquad v = 0$$

Dies ist mit $0 < r < \infty$ (**!**) die doppelt durchlaufene Strecke $[1, \infty)$.

2. Fall: Für $\varphi_0 = \pi/2$ gilt

$$u = 0 \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

Dies ist die einmal durchlaufene v–Achse von $-\infty$ bis ∞.

3. Fall: Für $\varphi_0 = \pi$ gilt

$$u = -\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \qquad v = 0$$

Dies ist die doppelt durchlaufene Strecke $[-\infty, -1]$.

4. Fall: Für $\varphi_0 = 3\pi/2$ gilt

$$u = 0 \qquad v = -\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

Dies ist die einmal durchlaufene v–Achse von ∞ bis $-\infty$.

5. Fall: Für $\varphi_0 \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ergibt die Elimination von r die Beziehung

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1$$

Dies sind Hyperbeln mit Halbachsen $a = |\cos\varphi_0|$ und $b = |\sin\varphi_0|$ und Brennpunkten in $c = \pm 1$.

Umkehrung der Joukowski–Funktion

1) Die Joukowski–Funktion ist zum Beispiel injektiv auf der Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > 1\}$$

mit Wertebereich

$$W = \{w \in \mathbb{C} \,:\, w \notin [-1, 1]\}$$

Die Umkehrfunktion ist dann gegeben durch

$$w = f^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 + 1}$$

2) Eine andere Möglichkeit ist etwa

$$\begin{aligned} D &= \{z \in \mathbb{C} \,:\, \text{Im}\, z > 0\} \\ W &= \{w \in \mathbb{C} \,:\, \text{Im}\, w \neq 0 \,\text{oder}\, |\text{Re}\, z| < 1\} \end{aligned}$$

In der obenstehenden Formel für $f^{-1}(z)$ ist das Vorzeichen der Wurzel jeweils geeignet anzupassen.

Die stereographische Projektion

Zunächst: Erweiterung des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

Betrachte die rationale Funktion

$$w = f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

mit den komplexen Polynomen p und q.
Die Funktion ist bei $z_0 \in \mathbb{C}$ nicht definiert, falls

$$q(z_0) = 0, \qquad p(z_0) \neq 0$$

Wir setzen dort

$$f(z_0) := \infty$$

und definieren ∞ als den **unendlich fernen Punkt**.
Weiter sei

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \infty$$

Rechenregeln mit ∞:

Für $a \neq 0$ definieren wir

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty \\ a \cdot \infty &= \infty \\ a/\infty &= 0 \end{aligned}$$

Aber: Die Ausdrücke $0 \cdot \infty$, $\infty \pm \infty$ lassen sich **nicht** sinnvoll definieren.

$\mathbb{C}^*$ ist ein **topologischer Raum**, d.h. die offenen Mengen in $\mathbb{C}^*$ sind die offenen Mengen in $\mathbb{C}$ und die Mengen der Form $\mathbb{C}^* \setminus K$ mit kompaktem $K \subset \mathbb{C}$.

Weiter definieren wir

$$z_n \to \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \frac{1}{z_n} \to 0 \quad (\Leftrightarrow |z_n| \to +\infty)$$

für $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n \neq 0$, $n \geq n_0$.

Weiterhin:

$\mathbb{C}^*$ ist (folgen–)kompakt, d.h. jede Folge in $\mathbb{C}^*$ besitzt einen Häufungspunkt. Man nennt daher $\mathbb{C}^*$ auch **Einpunkt–Kompaktifizierung** von $\mathbb{C}$.

Die Riemannschen Zahlenkugel

Darstellung der Riemannschen Zahlenkugel auf **Folie**

Die Riemannsche Zahlenkugel liefert eine bijektive Abbildung

$$P : S^2 \to \mathbb{C}^*$$

d.h. eine eindeutige Beziehung zwischen Punkten auf der Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ und den Punkten von $\mathbb{C}^*$.

Beachte: Man benötigt insbesondere den unendlich fernen Punkt ∞

Stereographische Projektion:

$$P : \begin{cases} X \neq N & \to \text{ Durchstoßpunkt der Geraden durch } X, N \\ & \quad \text{durch die komplexe Ebene} \\ X = N & \to \infty \end{cases}$$

Eigenschaften:

1) Die stereographische Projektion ist eine bijektive Abbildung

2) Die obere Kugelhälfte $x_3 > 0$ wird auf $|z| > 1$ abgebildet, die untere Kugelhälfte $x_3 < 0$ auf $|z| < 1$. Der Äquator bleibt fest.

3) Analytische Darstellung mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$:

$$z = P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

$$\mathbf{x} = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(z\bar{z} + 1)}, \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right)^T$$

Satz: (Kreistreue der stereographischen Projektion)

1) Das sphärische Bild einer Geraden in $\mathbb{C}^*$ (einschließlich des Punktes ∞) ist ein Kreis auf S^2, der durch den Nordpol N geht und umgekehrt.
2) Das sphärische Bild eines Kreises in $\mathbb{C}$ ist ein Kreis auf S^2, der nicht durch den Nordpol N geht und umgekehrt.

Darstellung dieser Eigenschaft auf **Folie**

Bemerkung:

Bezeichnet man Kreise und Geraden in $\mathbb{C}^*$ zusammenfassend als **verallgemeinerte Kreise**, so gehen nach dem obigen Satz verallgemeinerte Kreise in $\mathbb{C}^*$ unter der stereographischen Projektion in Kreise in S^2 über.

1.2 Die Möbius–Transformation

Definition:

Abbildungen der Form

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad \neq bc$$

nennt man **Möbius–Transformationen**.

Eigenschaften der Möbius–Transformationen:

1) Zähler und Nenner einer Möbius–Transformation haben unterschiedliche Nullstellen.
2) Die Möbius–Transformation ist eine Abbildung auf $\mathbb{C}^*$, d.h.

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$

mit

$$T\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \qquad T(\infty) := \frac{a}{c}$$

Eigenschaften der Möbius–Transformationen: (Fortsetzung)

3) Eine Möbius–Transformation ist auf $\mathbb{C}^*$ bijektiv und die Umkehrfunktion lautet:

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Beachte:

Es besteht eine Analogie zur Invertierung einer (2×2)–Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4) Die **Komposition** von Möbius–Transformationen ist wieder eine Möbius–Transformation.

Gegeben seien die beiden Möbius–Transformationen

$$\begin{aligned} w &= \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad \neq bc \\ z &= \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}, \qquad \alpha\delta \neq \beta\gamma \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$w = \frac{(a\alpha + b\gamma)t + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)t + (c\beta + d\delta)} = \frac{At+B}{Ct+D}$$

Die Koeffizienten $A, \ldots, D$ ergeben sich aus dem **Matrixprodukt**:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Daher gilt wegen det $(AB) =$ det $A \cdot$ det B

$$AD - BC = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$$

Satz: Möbius–Transformationen sind kreistreu.

Beweis:

Verwende eine geeignete Zerlegung für $c \neq 0$:

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} w_1 &= cz+d \\ w_2 &= \frac{1}{w_1} \\ w_3 &= \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \cdot w_2 \end{aligned}$$

Die Abbildungen w_1 und w_3 sind linear und daher kreistreu!

Es bleibt zu zeigen:

Die Inversion $w = f(z) = 1/z$ ist eine kreistreue Abbildung

Gehe den Umweg über die stereographische Projektion, d.h. betrachte statt $z \to 1/z$ die Abbildungsfolge

$$z \to \mathbf{x} := P^{-1}(z) \to \tilde{\mathbf{x}} \to P(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{z}$$

Dann gilt

$$\mathbf{x} = P^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(z\bar{z}+1)}, \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}\right)^T$$

sowie

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &:= P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}}+1}, \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}}{i(\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}}+1)}, \frac{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}}+1}\right)^T\end{aligned}$$

Vereinfachung ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \left(\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, -\frac{z-\bar{z}}{i(z\bar{z}+1)}, -\frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}\right) \\ &= (x_1, -x_2, -x_3)^T \end{aligned}$$

Wir erhalten damit eine Abbildung $F : S^2 \to S^2$ mit

$$F(\mathbf{x}) = (x_1, -x_2, -x_3)^T$$

Diese Abbildung ist eine Drehung der Sphäre um die x_1–Achse um 180° und offensichtlich **kreistreu**.

Damit haben wir gezeigt, dass die Abbildungsfolge

$$z \to \mathbf{x} := P^{-1}(z) \to \tilde{\mathbf{x}} \to P(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{z}$$

und daher die Inversion $z \to 1/z$ eine kreistreue Abbildung ist.

Bemerkung:

Abbildungseigenschaften der Möbius–Transformation:

1) Kreise, Geraden durch $\left(-\frac{d}{c}\right) \;\rightarrow\;$ Geraden der w–Ebene
2) Geraden der z–Ebene $\;\rightarrow\;$ Kreise, Geraden durch $\left(\frac{a}{c}\right)$
3) Kreise, die nicht durch $\left(-\frac{d}{c}\right)$ gehen $\;\rightarrow\;$ Kreise, die nicht durch $\left(\frac{a}{c}\right)$ gehen

Satz:

Gegeben seien je drei (verschiedene) Punkte z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3. Dann gibt es genau eine Möbius–Transformation $w = T(z)$ mit

$$w_j = T(z_j), \quad j = 1, 2, 3$$

Diese ist gegeben durch die **Dreipunktformel**

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Bemerkung:
Sind vier verschiedene Punkte z_0, z_1, z_2 und z_3 gegeben, so ist das **Doppelverhältnis** dieser Punkte gegeben durch

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Weiter gilt:

$D(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z_0, z_1, z_2, z_3$ liegen auf einem verallg. Kreis

Beispiel:
Gesucht ist die Möbius–Transformation mit

$$\begin{array}{c|ccc} z_i & 1 & i & 0 \\ \hline w_i & i & -i & 0 \end{array}$$

Dann ist die zugehörige eindeutige Möbius–Transformation definiert durch

$$\frac{w - i}{w + i} : \frac{0 - i}{0 + i} = \frac{z - 1}{z - i} : \frac{0 - 1}{0 - i}$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Umformung ergibt die Darstellung

$$w = \frac{(1+i)z}{(1+i)z - 2i}$$

Definition:

Gegeben sei ein Kreis C in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius R. Zwei Punkte $z, z' \in \mathbb{C}$ liegen **symmetrisch zum Kreis** C, falls gilt

$$(z - z_0)(\bar{z'} - \bar{z_0}) = R^2$$

Die Abbildung $z \rightarrow z'$ nennt man die **Inversion am Kreis** C oder auch **Spiegelung am Kreis** C.

Graphische Darstellung der Inversion auf Folie!

Insbsondere gilt: $z \rightarrow z_0 \Rightarrow z' \rightarrow \infty$, d.h. z_0 liegt symmetrisch zu ∞.

Definition:

Zwei Punkte z, z' nennt man **symmetrisch zu einer Geraden in** $\mathbb{C}$, wenn z' aus z durch Spiegelung an der Geraden entsteht.

Satz:

Möbius–Transformationen erhalten die Symmetrie zu verallgemeinerten Kreisen.

Beispiel: Gesucht ist eine Möbius–Transformation mit

$$\begin{aligned} |z| = 2 \;&\to\; |w+1| = 1 \\ z_1 = -2 \;&\to\; w_1 = 0 \\ z_2 = 0 \;&\to\; w_2 = i \end{aligned}$$

Eine Möbius–Transformation ist eindeutig bestimmt, falls die Transformation von **drei** Punkten festgelegt ist.

Problem: Uns fehlt **ein** Punkt!

Beispiel: (Fortsetzung)

Nach dem letzten Satz erhalten Möbius–Transformationen die Symmetrie zu verallgemeinerten Kreisen:

$z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_3 = \infty$ ist symmetrisch zu z_2 bzgl. des Kreises $|z| = 2$

Daher ist w_3 der zu $w_2 = i$ symmetrische Punkt bezüglich des Kreises $|w+1| = 1$ und somit gegeben durch

$$w_3 = \frac{1}{2}(-1+i)$$

Die Dreipunktformel lautet:

$$\left(\frac{w-0}{w-i}\right) : \left(\frac{\frac{1}{2}(-1+i)-0}{\frac{1}{2}(-1+i)-i}\right) = \left(\frac{z+2}{z-0}\right) : \left(\frac{z_3+2}{z_3-0}\right)$$

Beispiel: (Fortsetzung) Was passiert mit dem Term

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

für $z_3 \to \infty$?
Es gilt:

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0} = \frac{1 + \frac{2}{z_3}}{1 + \frac{0}{z_3}} \to 1 \quad \text{für } z_3 \to \infty$$

Wir erhalten also

$$\left(\frac{w}{w - i}\right) : \left(\frac{\frac{1}{2}(-1 + i)}{\frac{1}{2}(-1 + i) - i}\right) = \left(\frac{z + 2}{z}\right)$$

und Auflösung nach w ergibt:

$$w = T(z) = -\frac{z + 2}{(1 + i)z + 2i}$$

Beispiel: Für die reellen Zahlen $b > a > 0$ setzen wir

$$w = \frac{\sqrt{ab} + z}{\sqrt{ab} - z} = \frac{p + z}{p - z}, \quad p = \sqrt{ab}$$

Dann hat die vorliegende Möbius–Transformation folgende Abbildungseigenschaften:

$$\begin{aligned}
z_{1,2} = \pm\sqrt{ab} \;&\rightarrow\; w_{1,2} = \infty, 0 \\
z_{3,4} = a, b \;&\rightarrow\; w_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \pm\rho,\ \rho > 1 \\
z_{5,6} = -a, -b \;&\rightarrow\; w_{5,6} = \pm\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \pm\frac{1}{\rho} \\
z_7 = 0 \;&\rightarrow\; w_7 = 1 \\
z_8 = \infty \;&\rightarrow\; w_8 = -1
\end{aligned}$$

Eigenschaften dieser Möbius–Transformation:

- die x–Achse wird auf die u–Achse abgebildet,
- symmetrisch zur x–Achse liegende Punkte werden damit auf symmetrisch zur u–Achse liegende Punkte abgebildet,
- die angegebenen Kreise durch a, b bzw. $-a, -b$ werden auf die Kreise um 0 mit Radius ρ bzw. $1/\rho$ abgebildet.

Zentrales Anwendungsbeispiel:

Das elektrostatische Feld im Äußeren von zwei parallelen Leitern wird in das Feld eines Zylinderkondensators abgebildet.

Kapitel 2: Differentialrechnung im Komplexen

2.1 Komplexe Differentiation

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. $f(z)$ heißt in $z_0 \in D^0$ **komplex differenzierbar** mit Ableitung $f'(z_0)$, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Ist $f(z)$ in jedem Punkt eines Gebietes D komplex differenzierbar, so nennt man $f(z)$ **holomorph**, **analytisch** oder **regulär** auf D.

Beachte:

1) Der Grenzwertprozess $z \to z_0$ erfolgt in der komplexen Ebene, d.h. die Richtung der Annäherung $z \to z_0$ ist **beliebig**!

2) Die oben stehende Division ist die Division **komplexer** Zahlen!

Lemma:

Ist $f(z)$ reellwertig, d.h. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und ist $f(z)$ holomorph auf D, dann ist $f(z)$ eine konstante Funktion, d.h.

$$f(z) = \text{ const. } \in \mathbb{R} \quad \forall\, z \in D$$

Beweis:

1) Wir betrachten die Folge $z_n \to z_0$ gegeben durch

$$z_n = z_0 + \frac{1}{n}$$

Dann ist der Differenzenquotient für alle $n \in \mathbb{N}$ reell, denn

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = n(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{R}$$

Beweis: (Fortsetzung)

2) Dagegen liefert die Folge $z_n \to z_0$ mit

$$z_n = z_0 + \frac{i}{n}$$

den rein imaginären Differenzenquotienten

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{n}{i}(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{C}$$

Da aber die Funktion auf D holomorph ist, folgt

$$f'(z_0) = 0 \quad \forall\, z_0 \in D$$

d.h. $f(z)$ ist eine konstante Funktion.

Bemerkung:

Die Funktion $f(z)$ ist komplex differenzierbar in z_0

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

Die Funktion $f(z)$ sei komplex differenzierbar im Punkt z_0 und wir setzen

$$\gamma := f'(z_0)$$

Nach obiger Bemerkung ist eine äquivalente Schreibweise gegeben durch

$$f(z) = f(z_0) + \gamma(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

mit $\varepsilon(z) \to 0$ für $z \to z_0$.

Wir verwenden nun mit $z = x + i\, y$ die **Darstellungen**

$$f(z) = u(z) + i\, v(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

und

$$f'(z_0) =: \gamma = \alpha + i\, \beta$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} u(z) &= u(z_0) + \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + \mathrm{Re}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0| \\ v(z) &= v(z_0) + \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + \mathrm{Im}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0| \end{aligned}$$

In **Matrixschreibweise** lautet dies

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z_0) \\ v(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon(z) \cdot |z - z_0|$$

Wir interpretieren jetzt $f(z)$ als eine vektorwertige, **total differenzierbare** Funktion zweier reeller Variablen, d.h.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

mit der **Jakobi–Matrix**

$$Jf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

Satz:
Die Funktion $f(z)$ ist im Punkt $z_0 \in D$ genau dann komplex differenzierbar, wenn $f(z)$ als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dort total differenzierbar ist und die **Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen** gelten:

$$\begin{aligned} u_x(z_0) &= v_y(z_0) \\ u_y(z_0) &= -v_x(z_0) \end{aligned}$$

Korollar: Ist $f(z)$ komplex differenzierbar in $z_0 \in D$, so folgt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i\, v_x(z_0)$$

Beweis:

Da $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$f'(z_0) = \tilde{u}(z_0) + i\, \tilde{v}(z_0)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(z_0) \cdot (z - z_0) &= (\tilde{u}(z_0) + i\, \tilde{v}(z_0)) \cdot [(x - x_0) + i\,(y - y_0)] \\ &= \tilde{u} \cdot (x - x_0) - \tilde{v} \cdot (y - y_0) + i\,(\tilde{v} \cdot (x - x_0) + \tilde{u} \cdot (y - y_0)) \end{aligned}$$

Da f in z_0 total differenzierbar ist und die Cauchy–Riemannschen DGL's erfüllt sind, gilt ebenfalls

$$\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \cdot (x - x_0) - v_x(y - y_0) \\ v_x \cdot (x - x_0) + u_x(y - y_0) \end{pmatrix}$$

Korollar: Ist $f(z)$ holomorph auf dem Gebiet D und gilt für alle $z \in D$: $f'(z) = 0$, so ist $f(z)$ eine konstante Funktion.

Beweis:

Die Funktion $f(z)$ ist total differenzierbar und es gilt

$$f'(z) = u_x(z) + i\,v_x(z) = 0$$

Daraus folgt, dass die Jacobi–Matrix $(Jf)(z)$ identisch verschwindet und damit ist $f(z)$ eine konstante Funktion.

Satz:

Ist $f \in \mathcal{C}^2$ holomorph auf D, so gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

d.h. sowohl der Real– als auch der Imaginärteil von f erfüllen die Laplace-gleichung.

Es gilt auch die folgende **Umkehrung**:

Erfüllt $u = u(x, y)$ auf einem zusammenhängenden Gebiet die Laplace-gleichung $\Delta u = 0$, so existiert eine differenzierbare Funktion $v = v(x, y)$, sodass $f(z) = u(z) + i\, v(z)$ auf D holomorph ist.

Beweis: (für beide Aussagen)

1. Ist $f(z)$ holomorph, so folgt

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \overset{C.R.}{=} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\ \Delta v &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \overset{C.R.}{=} -\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

2. Sei $u = u(x, y)$ gegeben mit $\Delta u = 0$.
Gesucht: eine Funktion $v = v(x, y)$, sodass die C.R. DGL's erfüllt sind:

$$v_x = -u_y \qquad v_y = u_x$$

Aus den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$v_x = -u_y \qquad v_y = u_x$$

folgt

$$\operatorname{grad} v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) =: V = (V_1, V_2)$$

Wir suchen also ein Potential v mit $\operatorname{grad} v = V$. Unter der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0$$

ist die Existenz eines solchen Potentials gesichert.

Nun gilt aber

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$$

Differentiationsregeln:

1) Es gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(z_0) &= f'(z_0) \pm g'(z_0)\\ (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}\end{aligned}$$

2) **Kettenregel:** Ist $f(z)$ differenzierbar in z_0 und $g(w)$ differenzierbar in $w_0 = f(z_0)$, so folgt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

3) **Ableitung der Umkehrfunktion:**
Ist $f(z)$ holomorph und $f'(z_0) \neq 0$, so ist $f(z_0)$ um z_0 lokal bijektiv und es gilt

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad w_0 = f(z_0)$$

Differentiationsregeln:

4) **Modifizierte Kettenregel:** Ist $f(z)$ holomorph auf D und ist $c : [a,b] \to D$ eine $\mathcal{C}^1$–Kurve in D, so gilt

$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t)$$

Beweis: Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(c(t)) &= \frac{d}{dt} u(c(t)) + i \, \frac{d}{dt} v(c(t)) \\ &= (u_x \dot{c}_1 + u_y \dot{c}_2) + i \, (v_x \dot{c}_1 + v_y \dot{c}_2) \end{aligned}$$

Daneben haben wir

$$\begin{aligned} f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t) &= (u_x + i \, v_x) \cdot (\dot{c}_1 + i \, \dot{c}_2) \\ &= (u_x \dot{c}_1 - v_x \dot{c}_2) + i \, (v_x \dot{c}_1 + u_x \dot{c}_2) \end{aligned}$$

Beide Terme sind wegen der C.R. DGL’s identisch.

Beispiel 1:

Wir wissen bereits das die Funktion $f(z) = \text{const.}$ holomorph ist mit $f'(z) = 0$.

Für $f(z) = z$ erhalten wir wegen $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = y$

$$f'(z) = u_x(z) + i\,v_x(z) = 1$$

Daraus folgt, dass komplexe Polynome auf $\mathbb{C}$ holomorph sind mit

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k k z^{k-1}$$

Explizite Berechnung für $f(z) = z^2$: mit

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy$$

berechnet man

$$f'(z) = u_x(z) + i\,v_x(z) = 2x + i\,2y = 2z$$

Beispiel 2:

Rationale Funktionen, also Funktionen der Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \qquad p, q \text{ komplexe Polynome}$$

sind an allen Stellen mit $q(z) \neq 0$ komplex differenzierbar.

Beispiel 3:

Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ ist komplex differenzierbar mit $f'(z) = e^z$:

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y$$

Daher sind die C.R. DGL's erfüllt

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \qquad u_y = -v_x = -e^x \sin y$$

und es gilt

$$f'(z) = u_x + i\, v_x = e^x \cos y + i\, e^x \sin y = e^z$$

Beispiel 4: Die trigonometrischen Funktionen

$$\sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \qquad \cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

sind nach Beispiel 3 holomorph auf $\mathbb{C}$ und es gilt

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z$$

Beispiel 5: Durch komplexe Potenzreihen erklärte Funktionen,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

sind auf ihrem Konvergenzbereich $K_r(z_0)$ holomorph mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

und damit auf $K_r(z_0)$ gleichzeitig **beliebig oft** komplex differenzierbar.

2.2 Konforme Abbildungen

Satz:

1) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet D mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann gilt lokal bei $z_0 \in D$:

   a) Winkel zwischen sich im Punkt z_0 schneidender Kurven bleiben bei der Transformation $w = f(z)$, einschließlich des Umlaufsinns, erhalten,

   b) der Term $|f'(z_0)|$ ist die für alle von z_0 ausgehenden Richtungen gemeinsame Längenverzerrung. Insbesondere bleiben Längenverhältnisse erhalten.

Abbildungen mit diesen beiden Eigenschaften nennt man **konforme Abbildungen**.

Satz: (Fortsetzung)

2) Ist $w = f(z)$ eine konforme Abbildung und als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so ist $f(z)$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) \neq 0$.

Beweis: (zu Teil 1))

Seien c und d zwei Kurven, die für $t = 0$ durch den Punkt z_0 laufen, d.h.

$$c(0) = d(0) = z_0$$

Die beiden Tangentialvektoren in diesem Punkt sind dann

$$\dot{c}(0) \quad \text{und} \quad \dot{d}(0)$$

und für den Winkel γ zwischen den Tangentialvektoren gilt

$$\gamma = \measuredangle\left(\dot{c}(0), \dot{d}(0)\right) = \arg\left(\dot{c}(0)\right) - \arg\left(\dot{d}(0)\right)$$

Mittels der holomorphen Transformation f erhalten wir die beiden Kurven $f \circ c$ und $f \circ d$ im Bildraum.
Der Winkel $\tilde{\gamma}$ zwischen den beiden Kurven im Punkt $f(z_0)$ im Bildraum lautet dann

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma} &= \measuredangle\left(f'(z_0)\dot{c}(0), f'(z_0)\dot{d}(0)\right) \\
&= \arg\left(f'(z_0)\dot{c}(0)\right) - \arg\left(f'(z_0)\dot{d}(0)\right) \\
&= \arg\left(f'(z_0)\right) + \arg\left(\dot{c}(0)\right) - \arg\left(f'(z_0)\right) - \arg\left(\dot{d}(0)\right) \\
&= \gamma
\end{aligned}$$

Bezüglich der Längenverzerrung berechnet man

$$\|\frac{d}{dt}(f \circ c)\| = |f'(z_0)\dot{c}(0)| = |f'(z_0)| \cdot |\dot{c}(0)|$$

Definition:

Es sei $w = f(z)$ eine bijektive und konforme Transformation $f : D \to W$ zweier Gebiete $D, W \subset \mathbb{C}$.
Zu einer gegebenen $\mathcal{C}^2$–Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\Psi := \Phi \circ f^{-1}$$

Man nennt dann Ψ die **konforme Transformation** von Φ mittels f.

Abbildungsdiagramm auf Folie

Anwendung konformer Transformationen:

Ist $\Phi(z)$ eine gesuchte Potentialfunktion definiert in der **physikalischen Ebene** D, so ist Ψ die entsprechende Funktion in der **Modellebene** W.

Beachte: Funktioniert nur im zweidimensionalen physikalischen Raum.

Definition: Für eine Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ nennt man

$$\text{grad}\,\Phi(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

den **komplexen Gradienten** von $\Phi(z)$.

Satz: Sei Ψ die konforme Transformation von Φ mittels f. Dann gelten die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{grad}_z\,\Phi(z) &= \text{grad}_w\,\Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)} \\ \Delta_z \Phi(z) &= \Delta_w \Psi(f(z)) \cdot |f'(z)|^2 \end{aligned}$$

Beweis:

Nach Definition ist die konforme Transformation von Φ mittels f gegeben durch

$$\Psi := \Phi \circ f^{-1}$$

Daraus folgt aber $\Phi = \Psi \circ f$ und mit $f = u + i\,v$

$$\Phi(x,y) = \Psi(u(x,y), v(x,y))$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \Psi_u u_x + \Psi_v v_x \\ \Phi_y &= \Psi_u u_y + \Psi_v v_y\end{aligned}$$

Für den komplexen Gradienten gilt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\Phi(z) &= (\Psi_u u_x + \Psi_v v_x) + i\,(\Psi_u u_y + \Psi_v v_y) \\ &= \Psi_u(u_x + i\,u_y) + \Psi_v(v_x + i\,v_y) \\ &\overset{CR}{=} \Psi_u(u_x - i\,v_x) + i\,\Psi_v(u_x - i\,v_x) \\ &= \operatorname{grad}\Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}\end{aligned}$$

Die Berechnung der zweiten Ableitung ergibt

$$\begin{aligned}\Phi_{xx} &= \Psi_{uu}u_x^2 + 2\Psi_{uv}u_xv_x + \Psi_{vv}v_x^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx}\\ \Phi_{yy} &= \Psi_{uu}u_y^2 + 2\Psi_{uv}u_yv_y + \Psi_{vv}v_y^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Psi_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2\Psi_{uv}(u_xv_x + u_yv_y)\\ &\quad +\Psi_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \Psi_u\Delta u + \Psi_v\Delta v\end{aligned}$$

Wir verwenden nun wieder die CR–DGL’s und erhalten

$$\begin{aligned}u_x^2 + u_y^2 &= v_x^2 + v_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2\\ u_xv_x + u_yv_y &= 0\\ \Delta u &= \Delta v = 0\end{aligned}$$

und damit das gewünschte Resultat

$$\Delta\Phi = \Delta\Psi \cdot |f'(z)|^2$$

Korollar:

Bei konformen Transformation gehen harmonische Funktionen in harmonische Funktionen über.

Anwendung konformer Transformationen:

Zu lösen sei die Gleichung $\Delta u = 0$ auf einem “komplizierten” Gebiet D:

1) suche eine konforme Transformation, die das Gebiet D auf ein “einfacheres” Gebiet W transformiert,
2) transformiere die Randbedingungen auf W und löse die Laplacegleichung auf W,
3) transformiere die Lösung zurück auf das Ursprungsgebiet D.

Beispiel: Ebene Potentialströmung

Wir wollen das Geschwindigkeitsfeld einer stationären, wirbel– und quellenfreien Umströmung eines Zylinders berechnen. Sei

$$\mathbf{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

das gesuchte Geschwindigkeitsfeld. Dann gilt also

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\mathbf{w} &= \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \\ \text{div}\,\mathbf{w} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend, so folgt aus der ersten Beziehung

$$\exists\, u : D \to \mathbb{R} \;:\; \nabla u = -\mathbf{w}$$

beziehungsweise aus der zweiten Beziehung

$$\exists\, v : D \to \mathbb{R} \;:\; \nabla v = (w_2, -w_1)^T$$

Man nennt u das **Geschwindigkeitspotential** und v die **Stromfunktion**.

Die **Stromlinien** sind dann als Lösungen der gewöhnlichen DGL $y'(x) = w_2/w_1$ gegeben durch

$$v(x,y) = \text{const.}$$

Definition:

Die komplexe Funktion Φ definiert durch

$$\Phi := u + i\,v$$

nennt man **komplexes Strömungspotential**.

Das komplexe Strömungspotential $\Phi(z)$ ist eine holomorphe Funktion, denn es gelten die CR–DGL's

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= -w_1 - (-w_1) = 0 \\ u_y + v_x &= -w_2 + w_2 = 0 \end{aligned}$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{w}$ läßt sich direkt aus dem komplexen Strömungspotential berechnen: aus

$$\Phi'(z) = u_x + i\, v_x = -w_1 + i\, w_2$$

folgt

$$\mathbf{w} = w_1 + i\, w_2 = -\overline{\Phi'(z)}$$

Unsere **physikalische Ebene** ist

$$D := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > R\},$$

die **Modellebene** ist

$$W := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\, z \neq 0 \vee |\mathrm{Re} z| > 1\}$$

Die Joukowski–Funktion $f(z)$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right)$$

ist eine konforme Transformation von D auf W.

In der **Modellebene** können wir annehmen, dass ein homogenes Geschwindigkeitsfeld vorliegt, d.h. in W gilt

$$\mathbf{w} = \text{const} = (\bar{v}_\infty, 0)^T$$

da eine unendlich dünne Platte eine gegebene homogene Strömung in Richtung der reellen Achse und Geschwindigkeit $\bar{v}_\infty$ nicht beeinflußt.
Für das Geschwindigkeitspotential $U(w)$ gilt dann die Gleichung

$$\text{grad}\, U(w) = -(\bar{v}_\infty, 0)^T$$

und daraus folgt

$$U(w) = -\bar{v}_\infty \,\text{Re}\, w$$

Entsprechend ergibt sich für die Stromfunktion $V(w)$

$$\text{grad}\, V(w) = (0, -v_\infty)^T \qquad \Rightarrow \qquad V(w) = -\bar{v}_\infty \,\text{Im}\, w$$

In der **physikalischen Ebene** können wir annehmen, dass

$$\lim_{z \to \infty} \operatorname{grad} \Phi(z) = -v_\infty$$

gilt, d.h. im Unendlichen spürt die ungestörte Strömung kein Hindernis.
Wegen der Beziehung

$$\operatorname{grad} \Phi(z) = \operatorname{grad} \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$$

folgt mit

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{R}{z^2}\right)$$

die Beziehung $\bar{v}_\infty = 2Rv_\infty$.
Für das komplexe Strömungspotential gilt dann

$$\Psi(w) = -2Rv_\infty(\operatorname{Re} w + i \operatorname{Im} w)$$

Wir betrachten nun die Rücktransformation in die physikalische Ebene, d.h.

$$\Phi(z) = (\Psi \circ f)(z) = -2Rv_\infty(\mathrm{Re}\, f(z) + i\, \mathrm{Im}\, f(z))$$

Für die Joukowski–Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right)$$

gilt offensichtlich

$$\mathrm{Re}\, f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{R} + \frac{Rx}{x^2+y^2}\right) \qquad \mathrm{Im}\, f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{R} - \frac{Ry}{x^2+y^2}\right)$$

Damit ergibt sich das Geschwindigkeitspotential $u(z)$ in der physikalischen Ebene als

$$u(z) = u(x,y) = -v_\infty\left(x + \frac{R^2 x}{x^2+y^2}\right)$$

und die Stromfunktion lautet

$$v(z) = v(x,y) = -v_\infty \left(y - \frac{R^2 y}{x^2+y^2} \right)$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{w}$ um den Zylinder ist dann

$$\mathbf{w} = -\nabla u = -v_\infty \left(\frac{(x^2+y^2)^2 - R^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2R^2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

Insbesondere gilt:

1) In den beiden **Staupunkten** $(-R,0)$ und $(R,0)$ ist die Geschwindigkeit gleich Null,

$$\mathbf{w}(-R,0) = \mathbf{w}(R,0) = (0,0)^T$$

2) Die Geschwindigkeit ist maximal in den beiden Punkten $(0,-R)$ und $(0,R)$ mit

$$w_{\text{max}} = 2v_\infty$$

Kapitel 3: Komplexe Integration

3.1 Beispiele zur komplexen Integration

Definition:

Eine komplexwertige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ einer reellen Variablen ist **integrierbar**, falls der Real– und Imaginärteil von f integrierbar sind, und es gilt:

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$$

Eigenschaften:

Linearität:

$$\int_a^b (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))\,dt = \alpha\int_a^b f_1(t)\,dt + \beta\int_a^b f_2(t)\,dt \qquad (\alpha,\beta \in \mathbb{C})$$

etc.

Weiter gilt stets:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Beweis: Wir setzen

$$\int_a^b f(t)\,dt =: Re^{i\varphi}$$

und erhalten demnach

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| &= R = e^{-i\varphi}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b e^{-i\varphi} f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\varphi} f(t))\,dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\varphi} f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt\end{aligned}$$

Komplexe Integration analog zu **Kurvenintegralen**:

Sei $c : [a,b] \to D \subset \mathbb{R}^n$ ein stückweiser $\mathcal{C}^1$–Weg, $f : D \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann hatten wir in Analysis II/III die beiden Kurven-integrale 1. und 2. Art

$$\int_c f(\mathbf{x})ds := \int_a^b f(c(t))\|\dot{c}\|\,dt \quad \text{bzw.} \quad \int_c \mathbf{F}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{F}(c(t)), \dot{c}(t)\rangle\,dt$$

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $c : [a,b] \to D$ ein stückweiser $\mathcal{C}^1$–Weg. Dann ist

$$\int_c f(z)\,dz := \int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\,dt$$

das komplexe Integral von $f(z)$ längs der Kurve c.

Eigenschaften:

1) Der Wert des komplexen Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.

2) Bei Änderung der Durchlaufrichtung gilt

$$\int_{-c} f(z)\,dz = -\int_{c} f(z)\,dz$$

Hier ist $(-c)(t) := c(b + t(a-b))$, $0 \leq t \leq 1$.

3) Linearität

$$\int_{c} (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_{c} f(z)\,dz + \beta \int_{c} g(z)\,dz \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

4) Additivität bzgl. des Integrationsweges:

$$\int_{c_1 + c_2} f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz$$

Eigenschaften: (Fortsetzung)

5) Es gilt die Abschätzung

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in\text{Bild}(c)} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\dot{c}(t)|\,dt}_{\text{Bogenlänge } L(c)}$$

Beweis

Man berechnet direkt

$$\begin{aligned}\left|\int_c f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(c(t))||\dot{c}(t)|\,dt \leq \sup_{a\leq t\leq b} |f(c(t))| \cdot \int_a^b |\dot{c}(t)|\,dt\end{aligned}$$

Beispiel 1:

Sei $f(z) = z$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\oint_c z\,dz &= \int_0^{2\pi} re^{it} \cdot (rie^{it})\,dt \\
&= ir^2 \int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt \\
&= ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i\,\sin(2t))\,dt \\
&= -r^2 \int_0^{2\pi} \sin(2t))\,dt + i\,r^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t))\,dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 2:

Sei $f(z) = \bar{z}$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\oint_c \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} re^{-it} \cdot (rie^{it})\, dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = r^2 \cdot 2\pi i$$

Beispiel 3:

Sei $f(z) = 1/z$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\oint_c \frac{1}{z}\, dz = \oint_c \frac{\bar{z}}{|z|^2}\, dz = \frac{1}{r^2} \oint_c \bar{z}\, dz = 2\pi i$$

Beispiel 4: Es gilt mit $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ die Beziehung

$$\oint_c (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 2\pi i & : \text{ für } n = -1 \\ 0 & : \text{ für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Beispiel 4: (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}\oint_c (z-z_0)^n\,dz &= \int_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^n \cdot (rie^{it})\,dt = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt \\ &= r^{n+1}\left(-\int_0^{2\pi}\sin((n+1)t))\,dt + i\int_0^{2\pi}\cos((n+1)t))\,dt\right) \\ &= \begin{cases} 2\pi i & : \text{ für } n=-1 \\ 0 & : \text{ für } n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}\end{cases}\end{aligned}$$

Nur für $n=-1$ verschwindet das Integral nicht und es gilt

$$\oint_x \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$$

Frage: Woran liegt das?

Satz: Ist $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ eine Reihe stetiger Funktionen, die auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ **gleichmäßig konvergiert**, und ist $c : [a, b] \to D$ ein stückweiser $\mathcal{C}^1$–Weg, so gilt

$$\int\limits_c f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_c f_k(z)\,dz$$

Beweis: Da die Reihe stetiger Funktionen gleichmäßig konvergiert, ist auch die Grenzfunktion $f(z)$ stetig und daher auch integrierbar und

$$\int\limits_c f(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n} \int\limits_c f_k(z)\,dz = \int\limits_c R_n(z)\,dz$$

Gleichmäßige Konvergenz bedeutet:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;:\; \exists\,N(\varepsilon) \;:\; \forall\,n \geq N,\; z \in D \;:\; |R_n(z)| < \varepsilon$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt sofort

$$\left| \int_c R_n(z)\,dz \right| \leq \varepsilon \cdot L(c)$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \int_c R_n(z)\,dz = 0$$

Beispiel:

Sei $c(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ und $|z_0| > r$. Dann gilt:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0}\,dz = 0$$

Beachte: Der Punkt z_0 liegt außerhalb des Kreises $c(t)$.

Beispiel: (Fortsetzung)

Man berechnet direkt unter Verwendung der geometrischen Reihe:

$$\oint\limits_{|z|=r} \frac{dz}{z-z_0} = -\frac{1}{z_0} \oint\limits_{|z|=r} \frac{dz}{1-\frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0} \oint\limits_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k}\, z^k \, dz$$

denn es gilt

$$\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\frac{1}{z_0} \oint\limits_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k}\, z^k \, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+1}} \oint\limits_{|z|=r} z^k \, dz = 0$$

da man Integration und Summation vertauschen kann.

Beispiel: (Vorgriff auf die Laurent–Reihe)

Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{analog zur Taylor–Reihe}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k}_{\text{negative Potenzen}}$$

nennt man eine **Laurent–Reihe**.

Sie konvergiert lokal gleichmäßig und absolut in einem Kreisring

$$0 \leq R_1 < |z-z_0| < R_2$$

Für $R_1 < r < R_2$ und $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt daher

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k \, dz = 2\pi\, i\, a_{-1}$$

3.2 Der Cauchysche Hauptsatz

Wir hatten im Abschnitt 3.1 mit der Kurve $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ die Aussage

$$\oint_c (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i & : \text{ für } n = -1 \\ 0 & : \text{ für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Frage: Wann verschwindet das Integral über geschlossene Kurven?

Satz: (Cauchyscher Integralsatz, Hauptsatz der Funktionentheorie)

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein **einfach zusammenhängendes** Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine **holomorphe** Funktion und $c : [a, b] \to G$ eine **geschlossene** stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve, so gilt stets

$$\oint_c f(z) \, dz = 0$$

Bemerkung:
Alle drei **(fett gedruckten)** Voraussetzungen sind wichtig und zusammen hinreichend:

1) Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist **nicht** holomorph und es gilt:

$$\oint\limits_{|z|=1} \bar{z}\,dz \neq 0$$

2) Das Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend und es gilt:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz \neq 0$$

3) Die Kurve c ist **nicht** geschlossen und es gilt:

$$\int\limits_c z\,dz \neq 0, \quad c(t) = e^{(1+i)t}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes:

Wir setzen $c(t) = (x(t), y(t))^T$ und $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$:

$$\begin{aligned}\oint_c f(z)\,dz &= \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y})\,dt + i\int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x})\,dt \\ &= \oint_c \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} d\mathbf{x} + i\oint_c \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Bei beiden Vektorfelder $(u, -v)^T$ und $(v, u)^T$ ist wegen der CR–DGL's die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\text{rot}\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = u_y + v_x = 0, \quad \text{rot}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = v_y - u_x = 0$$

Daher existiert ein **Potential** und beide Integrale sind wegen der **geschlossenen Kurve** c identisch gleich Null.

Korollar: Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f(z)$ holomorph auf G und $c_1, c_2 : [a,b] \to G$, so folgt aus $c_1(a) = c_2(a)$ und $c_1(b) = c_2(b)$ direkt

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_{c_2} f(z)\, dz$$

d.h. das Integral $\int_c f(z)\, dz$ ist **wegunabhängig**.

Satz: (Existenz einer Stammfunktion)
Sei $G \subset \mathbb{C}$, $f(z)$ holomorph auf G, $z_0 \in G$ ein fester Punkt und setze für $z \in G$

$$F(z) := \int_{c_z} f(\xi)\, d\xi$$

mit einer beliebigen stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurve, die z_0 und z verbindet.
Dann ist $F(z)$ eine **Stammfunktion** von $f(z)$, d.h. es gilt

$$F'(z) = f(z)$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)h\,dt \\ &= \int_0^1 f(z+th)\,dt\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\int_0^1 (f(z+th)-f(z))\,dt\right| \\ &\le \sup_{t\in[0,1]} |f(z+th)-f(z)| \to 0\end{aligned}$$

für $h \to 0$.

Korollar:

Ist $f(z)$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorph und $F(z)$ eine Stammfunktion von $f(z)$, so gilt für alle stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurven $c : [a, b] \to G$

$$\int_c f(z)\,dz = F(c(b)) - F(c(a))$$

Beispiel:

Wir betrachten mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ das Integral

$$\int_{a-i\,b}^{a+i\,b} \frac{dz}{z^2}$$

Die Funktion $f(z) = 1/z^2$ ist **holomorph** auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit

$$G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

Damit ist obenstehendes Integral **wegunabhängig**.

Beachte: Das Gebiet G ist gerade die komplexe Ebene ohne die negative reelle Achse.

Integration: Wir setzen $c(t) = a + i\,t$, $-b \leq t \leq b$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_c \frac{dz}{z^2} &= \int_{-b}^{b} \frac{i}{(a + i\,t)^2}\,dt = -\left.\frac{1}{a + i\,t}\right|_{-b}^{b} \\ &= \frac{1}{a - i\,b} - \frac{1}{a + i\,b} = \frac{2ib}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\int_{a-i\,b}^{a+i\,b} \frac{dz}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)\bigg|_{a-i\,b}^{a+i\,b} = \frac{2ib}{a^2 + b^2}$$

Bemerkung:

Anstelle des einfachen Zusammenhangs genügt es, im Cauchyschen Integralsatz zu fordern, dass c **nullhomotop** ist, d.h. sich in G stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

Der Begriff **homotope** Wege wird auf Folie erklärt.

Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz:

Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G. Dann gilt für zwei geschlossene Wege c und $\tilde{c}$:

$$c, \tilde{c} \text{ homotop} \quad \Rightarrow \quad \oint_c f(z)\, dz = \oint_{\tilde{c}} f(z)\, dz$$

Beispiel: Für jede einfach geschlossene Kurve c, die den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ (einmal) im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\oint_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

Denn $c(t)$ ist homotop zu $\tilde{c}(t) = z_0 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Definition:

Für eine geschlossene, stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ heißt

$$\text{Uml}\,(c, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{dz}{z - z_0}$$

die **Umlaufzahl** von c bezüglich des Punktes z_0.

Die Umlaufzahl ist stets eine ganze Zahl und gibt an, wie oft der Weg c den Punkt z_0 in mathematisch positivem Sinne umläuft.

3.3 Die Cauchysche Integralformel, Taylor–Entwicklung

Satz: (Cauchysche Integralformel)

Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G, $z_0 \in G$ und $c : [a, b] \to G \setminus \{z_0\}$ ein zum Punkt z_0 homotoper Weg, der z_0 im positiven Sinn einmal umläuft. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

Beweis:

Der Weg c läßt sich innerhalb von $G \setminus \{z_0\}$ auf einen Kreis $k_r(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ zusammenziehen. Daher gilt

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = \oint_{k_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} \, dt$$

$$\oint\limits_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint\limits_{k_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\,dt$$

$$= i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt$$

Im Grenzfall $r \to 0$ erhalten wir offensichtlich die Beziehung

$$i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt \to 2\pi i f(z_0)$$

Da das Integral $\oint\limits_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ aber unabhängig von r ist, folgt

$$\oint\limits_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

Bemerkung:

1) Für einen beliebigen z_0–homotopen Weg in $G \setminus \{z_0\}$, der den Punkt z_0 nicht notwendigerweise genau einmal durchläuft, gilt

$$\oint\limits_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Uml}\,(c, z_0) \cdot f(z_0)$$

2) Nützlich ist folgende heuristische Herleitung: aus der Taylor–Formel

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

folgt

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-1}$$

2) (Fortsetzung)

Formal erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\oint\limits_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz &= \oint\limits_c \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\oint\limits_c \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-1}\,dz}_{=0} \\ &= 2\pi i \cdot f(z_0)\end{aligned}$$

Beispiel:

Zu berechnen sei das Integral

$$\oint\limits_c \frac{1}{1+z^2}\,dz,$$

wobei c die Achterkurve bezeichnet, die den Punkt $z_1 = i$ einmal im positiven Sinn, den Punkt $z_2 = -i$ einmal im negativen Sinn umläuft.

1) Berechnung mittels **Partialbruchzerlegung**

$$\begin{aligned}
\oint_c \frac{1}{1+z^2}\,dz &= \oint_c \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \frac{i}{2}\oint_c \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right) dz \\
&= \frac{i}{2}\oint_c \frac{dz}{z+i} - \frac{i}{2}\oint_c \frac{dz}{z-i} \\
&= \frac{i}{2}(-2\pi i) - \frac{i}{2}(2\pi i) = 2\pi
\end{aligned}$$

2) Berechnung mittels **Cauchyscher Integralformel**

$$\begin{aligned}
\oint_c \frac{1}{1+z^2}\,dz &= \oint_{c_1} \frac{\left(\frac{1}{z+i}\right)}{z-i}\,dz + \oint_{c_2} \frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)}{z+i}\,dz \\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{i+i}\right) - 2\pi i\left(\frac{1}{-i-i}\right) = 2\pi
\end{aligned}$$

Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel:

Korollar 1: (Mittelwerteigenschaft)

Ist $f(z)$ holomorph auf dem Gebiet G, so gilt für $z_0 \in G$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$ die Mittelwertformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$

Korollar 2: (Maximumprinzip)

1) Ist $f(z)$ holomorph auf G und besitzt $|f(z)|$ sein Maximum in $z_0 \in G$, dann ist $f(z)$ eine konstante Funktion.

2) Ist $f(z)$ stetig auf $\bar{G}$ und holomorph auf G, so nimmt $|f(z)|$ sein Maximum stets auf dem Rand ∂G an.

Korollar 3: (Fundamentalsatz der Algebra)

Ist $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$, so besitzt $p(z)$ wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis:

Annahme: das Polynom besitzt keine Nullstelle. Dann ist die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{p(z)}$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} \right| \\ &= \frac{1}{|z|^n} \cdot \left| \frac{1}{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \ldots + a_0 \frac{1}{z^n}} \right| \end{aligned}$$

Im Grenzfall $z \to \infty$ erhalten wir also

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0$$

Daher muss $|f(z)|$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ das Maximum annehmen und nach dem Maximumprinzip folgt $f(z) = $ const.

Demnach ist auch $p(z) = $ const und wir setzen

$$p(z) := \alpha$$

Es gilt dann

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = \alpha$$

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich $a_n = 0$, also einen Widerspruch.

Satz: (Taylor–Entwicklung komplexer Funktionen)

1) Ist $f(z)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$, so ist $f(z)$ in jedem Kreis $\overline{K_r(z_0)} \subset G$ in eine **Potenzreihe** entwickelbar

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r$$

Den Punkt z_0 nennt man den **Entwicklungspunkt**.

Insbesondere ist $f(z)$ auf G beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

2) Die Koeffizienten a_k der Potenzreihe sind gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

Satz: (Fortsetzung)

3) Für den Konvergenzradius R der Taylor–Reihe gilt

$$R \geq \sup\{r > 0 \,:\, K_r(z_0) \subset G\}$$

4) Analog zur Cauchyschen Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

gilt für die Ableitungen von $f(z)$ die Formel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

(**Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel**)

Beweis Teil 4):

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta$$

wobei der Kreis $|\zeta - z_0| = r$ einmal im positiven Sinn durchlaufen wird. Liegt nun z innerhalb dieses Kreises, d.h. $|z - z_0| < r$, so folgt ebenfalls

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite ist der Grenzwert der geometrischen Reihe, d.h.

$$\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k$$

und wir erhalten damit

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k$$

Für den Integranden in obenstehendem Integral folgt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} \cdot (z-z_0)^k$$

Für die Integralformel ergibt sich damit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k \, d\zeta$$

Da die Potenzreihe gleichmäßig konvergiert, kann man Summation und Integration vertauschen und wir erhalten

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \right] (z - z_0)^k$$

Ein Koeffizientenvergleich in der Potenzreihe ergibt wegen 2)

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta$$

und damit die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel.

Satz: (Cauchysche Ungleichung)

Sei $f(z)$ holomorph auf G, $z_0 \in G$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$. Für die Koeffizienten der Taylor–Entwicklung von $f(z)$ um z_0 gilt dann die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

mit

$$M(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

Beweis:

Aus der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

folgt direkt

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\max_{|z-z_0|=r}\left(\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\right)\cdot 2\pi r \\
&= \frac{1}{r^n}\cdot M(r)
\end{aligned}
$$

Satz: (Satz von Liouville)

Ist $f(z)$ holomorph und beschränkt auf $\mathbb{C}$, so ist $f(z)$ konstant.

Beweis:

Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt im Grenzwert $r \to \infty$:

$$f^{(n)}(z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\, n \geq 1$$

Damit ist auch $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(z) = \text{const}$.

3.4 Singularitäten, Residuen

Satz: (Laurent–Entwicklung)

1) Sei $f(z)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C}$ (Entwicklungs-punkt), $0 < \bar{r} < \bar{R}$ mit

$$K_{\bar{r},\bar{R}}(z_0) := \{z \,:\, \bar{r} < |z - z_0| < \bar{R}\} \subset G$$

Dann ist $f(z)$ auf $K_{\bar{r},\bar{R}}(z_0)$ in eine **Laurent–Reihe** entwickelbar:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \bar{r} < |z - z_0| < \bar{R}$$

2) Für die Koeffizienten gilt ($\bar{r} < \rho < \bar{R}$)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Satz: (Fortsetzung)

3) Die Reihe konvergiert innerhalb des größten Kreisringes $K_{r,R}(z_0)$, der noch innerhalb von G liegt, in jedem kleineren (kompakten) Kreisring $\overline{K_{\rho_1,\rho_2}(z_0)}$ ist die Konvergenz absolut und gleichmäßig.

Beweis:

Gegeben sei ein Kreisring $K_{r,R}(z_0) \subset G$, $\bar{r} < r < R < \bar{R}$ mit den beiden Rändern

$$\begin{aligned} c_r(t) &:= z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ c_R(t) &:= z_0 + Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

Behauptung:

Nach dem Cauchyschen Integralsatzes gilt für einen Punkt $z \in K_{r,R}(z_0)$ die Beziehung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

Seien dazu die beiden Kurven c_1 und c_2 definiert wie auf der Folie angegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta &= \oint_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint_{c_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= 2\pi i \cdot f(z) + 0\end{aligned}$$

Wir versuchen nun, für die beiden Kurvenintegrale eine Reihendarstellung herzuleiten:

Sei zunächst ζ ein Punkt auf c_R, d.h. $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k\end{aligned}$$

Setzt man diese Formel in das Kurvenintegral ein, so folgt direkt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta\right] (z - z_0)^k$$

Sei nun ζ ein Punkt auf c_r, d.h. $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\
&= -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^k \\
&= -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \qquad (m = -(k+1))
\end{aligned}$$

Einsetzen in das Kurvenintegral über c_r ergibt demnach

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = -\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta\right](z - z_0)^k$$

Addiert man nun beide Reihendarstellungen, so folgt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad r \le |z - z_0| \le R$$

wobei die Koeffizienten durch

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_R}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta & : \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_r}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta & : \quad k = -1, -2, -3, \ldots \end{cases}$$

gegeben sind.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann auch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

für ein beliebiges $\rho \in [r, R]$.

Bemerkung:

1) Die Laurent–Entwicklung von $f(z)$ ist bei vorgegebenem Kreisring **eindeutig** bestimmt.

2) Ist $f(z)$ holomorph im gesamten Kreis $\overline{K_{\bar{R}}(z_0)}$, so gilt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes für $k = -1, -2, -3, \ldots$ die Beziehung

$$a_k = 0$$

und die Laurent–Entwicklung stimmt dann mit der Taylor–Entwicklung überein.

Beispiel:

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und Kreisring $0 < |z| < \infty$.

Mit der Taylor–Entwicklung

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

erhalten wir die Laurent–Reihe

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \ldots$$

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Der Nenner hat zwei Nullstellen in $z = -1$ und $z = 2$. Es existieren daher drei Laurent–Entwicklungen, nämlich in $|z| < 1$, in $1 < |z| < 2$, und in $|z| > 2$.

Für den Kreisring $1 < |z| < 2$ gilt etwa:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \\ &= \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{3z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{3} \cdot z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3 \cdot 2^{k+1}}\right) \cdot z^k \end{aligned}$$

Definition: Sei $f(y)$ holomorph auf einem Gebiet G. Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **isolierte Singularität** von $f(z)$, falls ein $r > 0$ existiert mit $K_{0,r}(z_0) \subset G$.
Ist $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ die Laurent–Entwicklung in $K_{0,r}(z_0)$, so nennt man

1) den Punkt z_0 eine **hebbare Singularität**, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$ gilt,

2) den Punkt z_0 einen **Pol der Ordnung** $m \in \mathbb{N}$, falls gilt

$$a_{-m} \neq 0 \quad \wedge \quad \forall\, k < -m \;:\; a_k = 0$$

3) den Punkt z_0 eine **wesentliche Singularität**, falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$ gilt.

Beispiele:

1) Der Punkt $z_0 = 0$ ist eine hebbare Singularität der Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

denn die Taylor–Entwicklung lautet

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

2) Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

hat in $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 1.

3) Rationale Funktionen haben **keine** wesentlichen Singularitäten: sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine rationale Funktion. Die Singularitäten sind die Nullstellen von $q(x)$. Ist nun z_0 eine m–fache Nullstelle von $q(z)$, so gilt

$$q(z) = (z - z_0)^m r(z),\, r(z_0) \neq 0 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot g(z),$$

wobei g holomorph in z_0 ist. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

d.h. z_0 ist ein Pol der Ordnung $\leq m$ oder eine hebbare Singularität, falls $a_0 = a_1 = \ldots a_{m-1} = 0$.

4) Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, denn es gilt

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \ldots$$

Satz: (Klassifikation von Singularitäten)

1) Ist z_0 eine habbare Singularität, so existiert der Grenzwert $\lim_{z \to z_0} f(z)$. Die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : \; z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) & : \; z = z_0 \end{cases}$$

ist eine **holomorphe Fortsetzung** von $f(z)$.

2) Ist $f(z)$ in einer Umgebung von z_0 beschränkt, so ist z_0 eine hebbare Singularität.

3) Ist z_0 ein Pol von $f(z)$, so gilt

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

4) Ist z_0 eine wesentliche Singularität von $f(z)$, so bildet $f(z)$ jeden Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ auf $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ab.

3.5 Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

Definition: Besitzt die Funktion $f(z)$ bei z_0 die Laurent–Entwicklung

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

so nennt man

$$h(z; z_0) := \sum_{-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

den **Hauptteil** von $f(z)$ zum Entwicklungspunkt z_0.

Satz:

Ist $r(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion, wobei der Grad des Zählers echt kleiner als der Grad des Nenners ist, und sind $z_1, \ldots, z_m$ die (verschiedenen) Nullstellen von $q(z)$, so gilt

$$r(z) = h(z; z_1) + \ldots + h(z; z_m)$$

Beweis:

Idee: Wir zeigen, dass die Funktion $g(z)$ definiert durch

$$g(z) := r(z) - \sum_{j=1}^{m} h(z; z_j)$$

beschränkt und auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Nach dem Satz von Liouville folgt dann, dass $g(z)$ konstant ist. Mit $\lim_{z \to \infty} g(z) = 0$, folgt dann die Behauptung.

Offensichtlich ist $g(z)$ holomorph auf dem Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ und die Hauptteile der Laurent–Entwicklungen zu den Entwicklungspunkten $z_1, \dots, z_m$ verschwinden identisch.

Demnach sind die Punkte $z_1, \dots, z_m$ hebbare Singularitäten und $g(z)$ ist holomorph auf **ganz** $\mathbb{C}$. Wegen $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ folgt

$$\lim_{z \to \infty} r(z) = 0$$

und damit auch

$$\lim_{z \to \infty} g(z) = 0$$

Also ist $g(z)$ beschränkt und holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville folgt

$$g(z) = \text{const}$$

und aufgrund des Grenzverhaltens für $z \to \infty$ folgt

$$g(z) = 0$$

Anwendung des Satzes:

Die Partialbruchzerlegung einer komplexen rationalen Funktion kann über die Hauptteile der Laurent–Entwicklungen berechnet werden, wobei die Entwicklungspunkte gerade die Singularitäten der rationalen Funktion sind.

Beispiel:

Man bestimme die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)^2(z-1)}$$

Der Nenner besitzt die beiden Nullstellen $z = -1$ und $z = 1$. Wir bestimmen daher die Hauptteile der Laurent–Entwicklungen um gerade diese beiden Punkte.

1) Für $z = -1$ schreibt man

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \underbrace{\frac{4}{z-1}}_{g(z)}$$

Nun ist $g(z)$ in einer Umgebung des Punktes $z = -1$ holomorph und kann in eine Taylor–Reihe entwickelt werden. Es gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \Big(-2 - (z+1) + O((z+1)^2)\Big)$$

und wir erhalten damit

$$f(z) = \underbrace{-\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1}}_{h(z;-1)} + \dots$$

2) Analog schreiben wir für den Punkt $z = 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \underbrace{\frac{4}{(z+1)^2}}_{g(z)}$$

und erhalten durch Taylor–Entwicklung

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} \cdot \Big(1 - (z-1) + O((z-1)^2)\Big) \\ &= \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{h(z;-1)} -1 + \dots \end{aligned}$$

Demnach ist die komplexe Partialbruchzerlegung von $f(z)$ gegeben durch

$$f(z) = -\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$$

Definition:

Ist z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$, so besitzt $f(z)$ eine Laurent–Entwicklung zum Punkt z_0, d.h.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < r$$

Man nennt dann

$$\text{Res}\,(f; z_0) := a_{-1}$$

das **Residuum** von $f(z)$ in z_0.

Satz: (Residuensatz)

Sei G ein Gebiet, $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph, c eine geschlossene, stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve in $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$, die in G nullhomotop ist, d.h. innerhalb von c liegen höchstens die isolierten Singularitäten $z_1, \dots, z_m$. Dann gilt

$$\oint_c f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Uml}\,(c; z_k) \cdot \mathrm{Res}\,(f; z_k)$$

Beweis(idee):

Eine Skizze zur Beweisidee findet man auf der Folie.

1) Zunächst genügt es, die Singularitäten, die innerhalb von c liegen, zu untersuchen, da sonst die Umlaufzahl Null ist.

2) Man zerlegt c in geschlossene Kurven $c_1, \dots, c_s$, sodass jede dieser Kurven c_j nur Singularitäten mit gleicher Umlaufzahl l_j enthält.

3) Jede Kurve c_j ist innerhalb von $G \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ homotop zu einer l_j–fach durchlaufenen einfach geschlossenen Kurve $\tilde{c}_j$, siehe Zeichnung auf Folie.

Daraus folgt

$$\oint_c f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{s} \oint_{c_j} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{s} l_j \cdot \oint_{\tilde{c}_j} f(z)\,dz$$

4) Jeder einfach geschlossene Weg $\tilde{c}_j$ kann in eine Summe von Kreisen um die Singularitäten innerhalb von $\tilde{c}_j$ zerlegt werden, siehe Zeichnung auf Folie.

Daraus folgt

$$\oint_c f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Uml}\,(c; z_k) \oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z)\,dz$$

Mit der Laurent–Entwicklung um z_k gilt aber

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{|z-z_k|=\rho_k} f(z)\,dz &= \oint\limits_{|z-z_k|=\rho_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_k)^j\,dz \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot \oint\limits_{|z-z_k|=\rho_k} (z-z_k)^j\,dz \\
&= 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot \text{Res}\,(f; z_k)
\end{aligned}$$

Für die Kurve in der Beweisskizze erhält man also

$$\begin{aligned}
\oint\limits_c f(z)\,dz &= 2\pi i \cdot [2\text{Res}\,(f; z_1) + \text{Res}\,(f; z_2) \\
&\quad + \text{Res}\,(f; z_3) + 2\text{Res}\,(f; z_4) + 2\text{Res}\,(f; z_5)]
\end{aligned}$$

Methoden zur Berechnung von Residuen

Satz:

1) Ist z_0 ein **einfacher Pol** von $f(z)$, so besitzt $f(z)$ eine Darstellung der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

mit einer in z_0 holomorphen Funktion $g(z)$. Für das Residuum gilt dann

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

2) Ist $f(z) = p(z)/q(z)$ mit auch in z_0 holomorphen Funktionen p und q eine rationale Funktion und z_0 eine **einfache Nullstelle** von $q(z)$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Satz: (Fortsetzung)

3) Gilt $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$, $m \geq 1$ mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion $g(z)$, so gilt

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Beweis:

Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Teil 3), der über Taylor–Entwicklung bewiesen werden kann, da $g(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph ist:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-m}$$

Man kann dann direkt das Residuum ablesen und es folgt

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \text{Res}\,(f; z_0)$$

Beweis: (Fortsetzung)

Für Teil 2) definieren wir

$$q(z) =: (z - z_0)r(z)$$

Dann ist $r(z)$ im Punkt z_0 holomorph fortsetzbar mit $r(z_0) \neq 0$.

Damit ist die Funktion

$$g(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$$

bei $z = z_0$ holomorph und wir erhalten für $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

Nach Teil 1) folgt wegen $q'(z) = r(z) + (z - z_0)r'(z)$

$$\text{Res}\,(f; z_0) = g(z_0) = \frac{p(z_0)}{r(z_0)}$$

Beispiel: Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

hat man nach Teil 1) des letzten Satzes

$$\begin{aligned} \text{Res}\,(f;-1) &= \left.\frac{1}{z-2}\right|_{z=-1} = -\frac{1}{3} \\ \text{Res}\,(f;2) &= \left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Beispiel: Für

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

gilt nach 2)

$$\text{Res}\,(f;i) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i}, \qquad \text{Res}\,(f;-i) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=-i} = -\frac{1}{2i}$$

Beispiel: Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

hat bei $z_0 = i$ einen Pol zweiter Ordnung. Nach dem letzten Satz, Teil 3), gilt

$$\text{Res}\,(f;i) = g'(i) = -\frac{3}{4e}$$

wobei die Funktion $g(z)$ aufgrund der Darstellung

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

durch

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

gegeben ist.

3.6 Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Satz:

Sei $r(x) = p(x)/q(x)$ eine rationale Funktion, die keine Singularitäten auf $\mathbb{R}$ besitzt, und es gelte grad $(q) \geq$ grad $(p) + 2$. Dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}\, z>0} \text{Res}\,(R; z)$$

Beweis:

Wegen grad $(q) \geq$ grad $(p) + 2$ existiert nach dem Majorantenkriterium das oben stehende uneigentliche Integrale, denn für $x \gg 1$ gilt

$$\left|\frac{p(x)}{q(x)}\right| \leq \frac{c}{x^2}$$

Wir approximieren jetzt das uneigentliche reelle Integral durch ein komplexes Integral entlang einer Kurve (siehe Folie).

Ist r hinreichend groß, so liegen alle Singularitäten z_k von $r(z)$ mit strikt positivem Imaginärteil innerhalb der Kurve $c_1 + c_2$.
Daraus folgt

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(R; z_k) = \oint_{c_1+c_2} r(z)\,dz = \int_{c_1} r(z)\,dz + \int_{c_2} r(z)\,dz$$

Nun gilt

$$\int_{c_1} r(z)\,dz = \int_{-r}^{r} r(z)\,dz \to \int_{-\infty}^{\infty} r(z)\,dz \qquad (r \to \infty)$$

Weiter berechnet man

$$\left| \int_{c_2} r(z)\,dz \right| \le \max_{|z|=r} |r(z)| \cdot \pi r \le \pi r \frac{c}{r^2} \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

Daraus folgt direkt die Behauptung.

Beispiel: Wir untersuchen das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

Die Funktion $r(z) = 1/(1+z^6)$ besitzt sechs Polstellen, von denen drei in der oberen Halbebene liegen, nämlich $e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Ferner gilt

$$\text{Res}\,(r; z_k) = \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z_k} = -\frac{z_k}{6}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} &= 2\pi i\left(-\frac{1}{6}e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{6}e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{6} + 1\right) \end{aligned}$$

Beispiel: Wir untersuchen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2}\,dx, \quad a>0, \quad \omega>0$$

Der letzte Satz läßt sich nicht direkt anwenden, aber wegen

$$\left|\frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}\right| = \frac{e^{-\omega y}}{|z^2+a^2|} \le \frac{1}{|z^2+a^2|} \le \frac{c}{|z|^2} \qquad (y \ge 0)$$

entlang des Weges c_2, gilt die Aussage analog.
Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2}\,dx &= 2\pi i \sum_{\text{Im}\, z_k>0} \text{Res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}; z_k\right) = 2\pi i\, \text{Res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}; ia\right) \\ &= 2\pi i \left.\frac{e^{i\omega z}}{2z}\right|_{z=ia} = \frac{\pi}{a}e^{-\omega a}\end{aligned}$$

Weitere Anwendungen: (ohne Beweis)

Satz:

Sei $f(z)$ holomorph auf $\{z \,:\, \operatorname{Im} z > -\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten in der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$.
Gilt

$$\lim_{|z|\to\infty, y\geq 0} f(z) = 0,$$

so folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}; z_k\right)$$

Beispiel: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = 0$$

Satz:

Sei $r(z)$ eine rationale Funktion ohne Polstellen in $0 \leq x < \infty$ und es gelte $\operatorname{grad} q > \operatorname{grad} p$. Für $0 < \alpha < 1$ gilt dann

$$\int_0^\infty \frac{r(x)}{x^\alpha}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}} \text{Res}\left(\frac{r(z)}{z^\alpha}; z_k\right)$$

Dabei ist folgender Zweig von z^α zu wählen:

$$z = re^{i\phi}, \quad 0 < \phi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\phi}$$

Beispiel:

Man berechnet

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Kapitel 4: Die Fourier–Transformation

Wiederholung aus Analysis II: Fourier–Reihenentwicklung

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T–periodische, stückweise stetige Funktion:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right) \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos(k\omega\tau)\, d\tau \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin(k\omega\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Reelle Darstellung der Fourier–Entwicklung mit $\omega = 2\pi/T$.

Satz: **(Konvergenzsatz)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T–periodisch, stückweise stetig differenzierbar.
Betrachte die zugehörige Fourier–Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

1) Die Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_f(t) = \frac{1}{2}\Big(f(t^+) + f(t^-)\Big)$$

2) In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Bemerkung:

Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier–Reihe nicht.

Komplexe Darstellung

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \\ \gamma_k &= \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega\tau}\, d\tau \end{aligned}$$

Grundidee der Fourier–Transformation

Betrachte den formalen Grenzwert $T \to \infty$, um eine Fourier–Entwicklung für nicht–periodische Funktionen zu erhalten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \left(\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega_k \tau}\, d\tau \right) \Delta\omega$$

Riemannsche Summe mit $\Delta\omega := \omega$ und $\omega_k := k\Delta\omega$.

Definition:

Die Funktion $F(\omega)$ gegeben durch

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau$$

heißt (sofern sie existiert!) die **Fourier–Transformierte** (Spektralfunktion) von $f(t)$.

Die Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

nennt man das **Fourier–Integral** (Spektrale Zerlegung) von $f(t)$.

Beide uneigentlichen Integrale sind im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu berechnen.

Bemerkung:

Die Fourierkoeffizienten $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ einer periodischen Funktion $f(t)$ bilden das **diskrete Spektrum** von f.

Die Fourier–Transformation $(F(\omega))_{\omega\in\mathbb{R}}$ einer nicht–periodischen Funktion liefert das **kontinuierliche Spektrum**.

Andere Schreibweisen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \\
\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi}F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega
\end{aligned}$$

Fourier–Transformation und inverse Fourier–Transformation

Bemerkung:
Durch Zerlegung in Real– und Imaginärteil erhält man die **reelle Darstellung** der Fourier–Transformation

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau))\,d\tau \\ &=: a(\omega) - ib(\omega) \end{aligned}$$

mit

$$a(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau \qquad \text{(gerade Funktion)}$$

$$b(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin(\omega\tau)\,d\tau \qquad \text{(ungerade Funktion)}$$

Dann gilt auch die Darstellung des Fourier–Integrals:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a(\omega) - ib(\omega))(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))\, d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t))\, d\omega \end{aligned}$$

Zusammenfassung: (Sinus–, Cosinus–Spektrum)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t))\, d\omega \\ a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega\tau)\, d\tau, \qquad b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Beispiel:

Wir betrachten den **Rechteckimpuls** der Form

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \quad -a \le t \le a \\ 0 & : \quad |t| > a \end{cases}$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int\limits_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin(\omega a) & : \quad \omega \neq 0 \\ 2a & : \quad \omega = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Umkehrung:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)}{\omega}\cos(\omega t)\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a+t))}{\omega}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a-t))}{\omega}\, d\omega
\end{aligned}
$$

Dies sind sogenannte **Dirichlet–Integrale** der Form

$$
\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx
$$

und man verwendet zur Berechnung den Residuensatz.

Es folgt:

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx = \begin{cases} \pi & : \ \alpha > 0 \\ 0 & : \ \alpha = 0 \\ -\pi & : \ \alpha < 0 \end{cases}$$

Damit ergibt sich die Umkehrung in der Form

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} 1 & : \ |t| < a \\ \frac{1}{2} & : \ t = a \\ 0 & : \ |t| > a \end{cases}$$

Bemerkung:

Man beachte insbesondere die Mittelwerteigenschaft

$$F_f(t) = \frac{1}{2}\Big(f(t^+) + f(t^-)\Big)$$

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion $(a > 0)$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & : \; t \geq 0 \\ 0 & : \; t < 0 \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} \, dt \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega} \end{aligned}$$

Umkehrung wieder mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} e^{-at} & : \; t > 0 \\ 0 & : \; t < 0 \end{cases}$$

und $\mathcal{F}^{-1}[F](0) = 1/2$.

Konkrete Berechnung:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i\omega} e^{i\omega t} \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - ia} \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - iat} \, d\omega \\
&= \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z - iat}; z_k \right) \\
&= \begin{cases} e^{-at} & : \ t > 0 \\ 0 & : \ t < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion ($a > 0$)

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\, e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega t)}\, dt \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Satz: (Existenz und Eindeutigkeit)

1) Ist $f(t)$ stückweise stetig und absolut integrierbar, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$, so existiert die Fourier–Transformierte

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$. Das Integral konvergiert gleichmäßig und $F(\omega)$ ist stetig.

2) Ist $f(t)$ eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Funktion und absolut integrierbar, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) = \text{CHW} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{2\pi}\, d\omega$$

3) Sind f_1, f_2 wie in 2) mit $F_1(\omega) = F_2(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$, so folgt $f_1(t) = f_2(t)$ in allen Punkten t, in denen f_1 und f_2 stetig sind.

Rechenregeln:

Im Folgenden seien $f, g, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar. Mit $F(\omega), G(\omega), \ldots$ bezeichnen wir die entsprechenden Fourier–Transformierten.

1) **Linearität**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \qquad (\alpha \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

2) **Konjugation**

$$\mathcal{F}[\overline{f}](\omega) = \overline{F(-\omega)}$$

denn:

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t}\, dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t}\, dt}$$

Rechenregeln: (Fortsetzung)

3) **Streckung**

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

denn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ct) e^{-i\omega t}\, dt = \text{sgn}(c) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \frac{\tau}{c}} \frac{1}{c}\, d\tau = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\frac{\omega}{c}\tau}\, d\tau$$

4) **Verschiebungssätze**

$$\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = F(\omega - a)$$

Folgt durch direktes Einsetzen

Rechenregeln: (Fortsetzung)

5) **Faltungssatz**

Man nennt

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

die Faltung der Funktionen f und g. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\omega) &= F(\omega)\cdot G(\omega) \\ \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega) \end{aligned}$$

denn:

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \right) e^{-i\omega t}\,dt$$

Rechenregeln: (Fortsetzung)

5) **Faltungssatz** (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau \right) e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} g(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau dt \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)}\, dt \right) g(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau dt \\
&= F(\omega) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau dt = F(\omega) \cdot G(\omega)
\end{aligned}$$

Beispiel:

Für die Faltung $g = f * f$ des Rechteck–Impulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \quad -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & : \quad |t| > 1 \end{cases}$$

gilt

$$g(t) = \int\limits_{-1}^{1} f(t-\tau)\, d\tau = \begin{cases} 2 - |t| & : \quad -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & : \quad |t| > 2 \end{cases}$$

Aus dem Faltungssatz folgt mit dem Beispiel oben direkt

$$G(\omega) = F(\omega) \cdot F(\omega) = \begin{cases} \dfrac{4}{\omega^2} \sin^2 \omega & : \quad \omega \neq 0 \\ 4 & : \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Rechenregeln: (Fortsetzung)

6) **Differentiation**

Ist $f(t)$ eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen $\tau_1, \dots, \tau_m$ und sind $f(t)$, $f'(t)$ absolut integrierbar, so gilt:

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega) - \sum_{k=1}^{m} (f(\tau_k^+) - f(\tau_k^-))e^{-i\omega\tau_k}$$

Beweis mittels partieller Integration (auf Folie).

Ist $f(t)$ sogar stetig, so folgt $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega)$ und unter entsprechenden Voraussetzungen gilt sogar:

$$\mathcal{F}[f^{(r)}](\omega) = (i\omega)^r F(\omega)$$

Wesentliche Eigenschaft zum Einsatz der F–Transformation bei DGL's!

Beispiel:
Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

mit den Grenzbedingungen

$$\lim_{|t|\to\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{|t|\to\infty} y'(t) = 0$$

Man berechnet nun die Fourier–Transformation der DGL:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y](\omega) &= Y(\omega) \\ \mathcal{F}[y'](\omega) &= -i\omega Y(\omega) \\ \mathcal{F}[y''](\omega) &= -\omega^2 Y(\omega) \end{aligned}$$

Die Fourier–Transformation der DGL lautet damit:

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega)$$

und es ergibt sich

$$Y(\omega) = \frac{C(\omega)}{-\omega^2 + i\omega a + b}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} \, d\tau dt \end{aligned}$$

Rücktransformation ist dargestellt als Faltungsintegral.

Anwendungen der Fourier–Transformation

1) Partielle DGL’s: Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

Fourier–Transformation bezüglich der x–Variablen:

$$U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$

Damit folgt für die Wärmeleitungsgleichung

$$U_t = c(i\omega)^2 U, \qquad t > 0,\, \omega \in \mathbb{R}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t mit Parameter ω.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} U(\omega,t) &= U(\omega,0)e^{-c\omega^2 t} \\ U(\omega,0) &= U_o(\omega) \end{aligned}$$

und damit

$$U(\omega,t) = U_0(\omega)e^{-c\omega^2 t}$$

Rücktransformation:

Anfangsbedingung

$$\mathcal{F}^{-1}[U_0] = u_0(x)$$

Weiter gilt

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-c\omega^2 t}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\omega^2 t}\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[e^{-c\omega^2 t}] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\omega^2 t}\, e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\omega^2 t + i\omega x}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} e^{-\frac{x^2}{4ct}}\end{aligned}$$

Aus dem Faltungssatz folgt dann

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[U_0 e^{-c\omega^2 t}] \\ &= u_0 * \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} e^{-\frac{x^2}{4ct}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi c t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}}\, u_0(\xi)\, d\xi\end{aligned}$$

Analoge Lösungsdarstellung mit Hilfe der **Greenschen Funktion**.

2) Partielle DGL's: Potentialproblem für die Halbebene

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad 0 \le y < \infty \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

Fourier–Transformation bzgl. x (bei festem y) ergibt:

$$U_{yy} = -(i\omega)^2 U = \omega^2 U$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in y mit allgemeiner Lösung

$$U(\omega, y) = C_1(\omega)\, e^{|\omega| y} + C_2(\omega)\, e^{-|\omega| y}$$

Sucht man Lösungen, die für $|y| \to \infty$ beschränkt bleiben, folgt

$$U(\omega, y) = C_2(\omega)\, e^{-|\omega| y} \qquad (C_1(\omega) \equiv 0)$$

Mit der Randbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ folgt die Lösungsdarstellung

$$U(\omega, y) = U_0(\omega)\, e^{-|\omega| y}$$

Rücktransformation

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[U_0] &= u_0(x) \\ \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\omega| y}] &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2y}{y^2 + x^2} \end{aligned}$$

und Anwendung des Faltungssatzes ergibt

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-\xi)^2}\, u_0(\xi)\, d\xi$$

Dies ist gerade die **Poissonsche Integralformel** für die Halbebene.

3) Das Abtastproblem

Von einer hinreichend glatten Funktion $f(t)$ seien nur die Werte an den diskreten Punkten $t_k = k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, bekannt.

Frage:
Läßt sich $f(t)$ aus diesen Abtastwerten $f_k = f(t_k)$ eindeutig rekonstruieren?

Beispiel 1:
Sei $f(t)$ ein Polynom vom Grad n. Dann benötigt man (maximal) $(n+1)$ Werte, um das Polynom mittels Polynom–Interpolation zu bestimmen.
(Lagrange–Interpolation aus Analysis II)

Beispiel 2:
Sei $f(t)$ eine T–periodische Funktion mit Fourier–Entwicklung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, e^{ik\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Beispiel 2:
Sei $f(t)$ eine T–periodische Funktion mit Fourier–Entwicklung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, e^{ik\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Annahme :
Es treten nur endlich viele Frequenzen auf, d.h.

$$f(t) = \sum_{k=-m}^{m} \gamma_k \, e^{ik\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Die Funktion $f(t)$ ist also ein trigonometrisches Polynom. Damit ist $f(t)$ durch die Unbekannten $\gamma_{-m}, \ldots, \gamma_m$ eindeutig bestimmt.

Interpolationsproblem:

Taste Funktionswerte an den folgenden Stellen ab:

$$t_k = k \cdot \Delta t, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m+1, \quad \Delta t \leq \frac{T}{2m+1}$$

Abtastheorem von Shannon

Verallgemeinerung auf nicht–periodische Funktionen.

Nyquist–Bedingungen:

1) Die Funktion $f(t)$ besitze die endliche Bandbreite Ω, d.h.

$$F(\omega) = 0 \qquad \forall \quad |\omega| > \Omega$$

2) Die Abtastfrequenz $2\pi/\Delta t$ ist (mindestens) doppelt so groß wie die Bandbreite, d.h.

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega}$$

Dann läßt sich die Funktion $f(t)$ aus den Daten $f(t_k)$ mit $t_k = k \cdot \Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, eindeutig rekonstruieren.