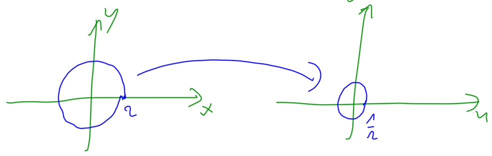
V_6 Kompl. Fkt'n 23.4.10

$W = \frac{1}{z}$

$z = r e^{i\varphi} \Rightarrow W = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$



$W = \frac{1}{z} = \frac{az+b}{cz+d}$.

$\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| \neq 0$

Apr 23-09:04

1.2 Die Möbius–Transformation

Definition:

Abbildungen der Form

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad \neq bc$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad * = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}$ $\quad \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$

nennt man **Möbius–Transformationen**.

$z_1 = -\frac{d}{c}$, $z_2 = -\frac{b}{a}$

Eigenschaften der Möbius–Transformationen:

Apr 23-09:20

$W = \frac{az+b}{cz+d}$, $(cz+d)w = az+b$

$z(cw-a) = b - dw$, $z = \frac{dw-b}{-cw+a}$

Eigenschaften der Möbius–Transformationen: (Fortsetzung)

3) Eine Möbius–Transformation ist auf $\mathbb{C}^*$ bijektiv und die Umkehrfunktion lautet:

$$T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a} = \frac{d - \frac{b}{w}}{-c + \frac{a}{w}}$$

$T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$

$T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$

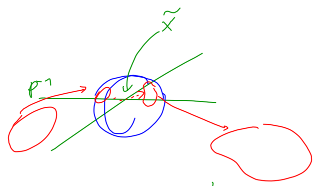
Beachte:

Es besteht eine Analogie zur Invertierung einer (2×2)–Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Apr 23-09:25



$W = \frac{1}{z} \overset{!}{=} P\Big(\tilde{x}\big(\underbrace{P^{-1}(z)}_{S^2}\big)\Big)$ with $z \in \mathbb{C}^*$

$\tilde{x}: S^2 \to S^2$

$0 \to 0$

$\boxed{P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)} = P^{-1}\Big(P\big(\tilde{x}(P^{-1}(z))\big)\Big) = \boxed{\tilde{x}\left(P^{-1}(z)\right)}$

z.z. $\tilde{x}$ Kreistreu

Apr 23-09:41

$$\mathrm{x} = P^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(z\bar{z}+1)}, \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}\right)^T$$

sowie

$$\tilde{\mathrm{x}} := P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}}+1}, \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}}{i(\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}}+1)}, \frac{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}}+1}\right)^T =$$

$$= \left(\frac{\bar{z}+z}{1+z\bar{z}}, \frac{\bar{z}-z}{i(1+z\bar{z})}, \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)$$

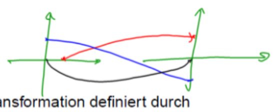
30

Apr 23-09:48

Beispiel:

Gesucht ist die Möbius–Transformation mit

z_i	1	i	0
w_i	i	$-i$	0



Dann ist die zugehörige eindeutige Möbius–Transformation definiert durch

$$\frac{w-i}{w+i} : \frac{0-i}{0+i} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{0-1}{0-i}$$

Apr 23-10:06

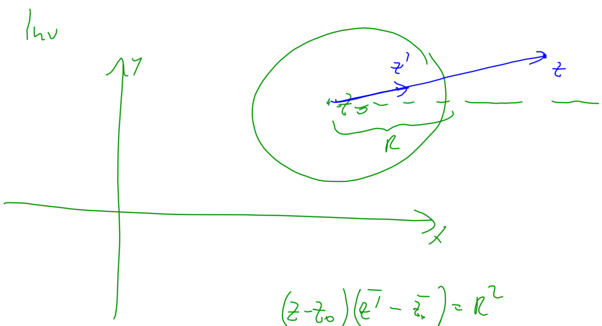
eispiel: (Fortsetzung)

mformung ergibt die Darstellung

$$w = \frac{(1+i)z}{(1+i)z - 2i} \qquad \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 1+i & -2 \end{pmatrix}$$

efinition:

Apr 23-10:09



$$\underbrace{(z-z_0)}_{re^{i\varphi}}\underbrace{(\bar{z}'-\bar{z}_0)}_{\frac{R^2}{r}e^{-i\varphi}} = R^2$$

$$z'-z_0 = \frac{R^2}{r}e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad z-z_0 \parallel z'-z_0$$

$$|z-z_0|\,|z'-z_0| = R^2$$

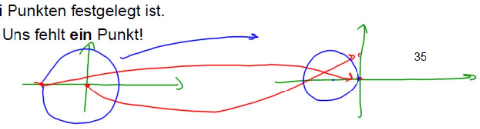
Apr 23-10:09

Beispiel: Gesucht ist eine Möbius–Transformation mit

$$|z| = 2 \;\rightarrow\; |w+1| = 1$$
$$z_1 = -2 \;\rightarrow\; w_1 = 0$$
$$z_2 = 0 \;\rightarrow\; w_2 = i$$

Eine Möbius–Transformation ist eindeutig bestimmt, falls die Transformation von **drei** Punkten festgelegt ist.

Problem: Uns fehlt **ein** Punkt!



35

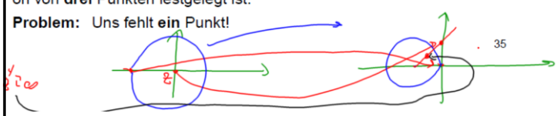
Apr 23-10:16

Beispiel: Gesucht ist eine Möbius–Transformation mit

$$|z| = 2 \;\rightarrow\; |w+1| = 1$$
$$z_1 = -2 \;\rightarrow\; w_1 = 0$$
$$z_2 = 0 \;\rightarrow\; w_2 = i$$

Eine Möbius–Transformation ist eindeutig bestimmt, falls die Transformation von **drei** Punkten festgelegt ist.

Problem: Uns fehlt **ein** Punkt!



35

Apr 23-10:18

$$w_3 = \frac{1}{2}(-1+i)$$

Die Dreipunktformel lautet:

$$\left(\frac{w-0}{w-i}\right) : \left(\frac{\frac{1}{2}(-1+i)-0}{\frac{1}{2}(-1+i)-i}\right) = \left(\frac{z+2}{z-0}\right) : \overbrace{\left(\frac{z_3+2}{z_3-0}\right)}^{\frac{1+\frac{2}{z_3}}{1}}$$

$$(w_3+1)\underbrace{(\bar{i}+\bar{1})}_{1-i} = 1^2 \quad \Rightarrow \quad w_3 = \frac{1}{2}(-1+i)$$

36

Apr 23-10:21