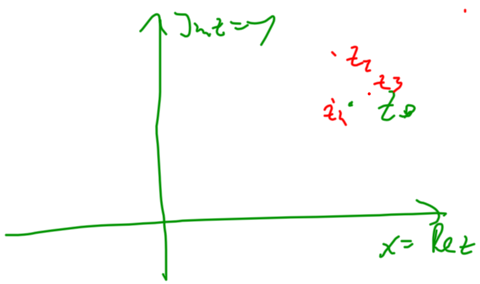
Vo Kompl. Fktn. 30.4.10



$z \to z_0$

<u>Bspl</u> $f(z) = z^2$

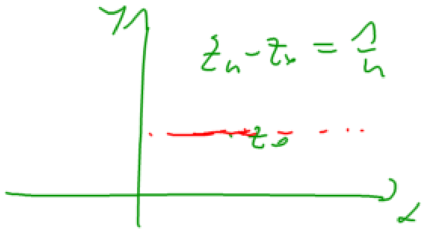
$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\cancel{(z - z_0)}(z + z_0)}{\cancel{z - z_0}} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0$$

<u>Bspl</u> $f(z) = \sin z$

$f = u + iv \quad , v \equiv 0$

ertig, d.h. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und ist $f(z)$
D, dann ist $f(z)$ eine konstante Funktion, d.h.

$$f(z) = \text{const.} \in \mathbb{R} \quad \forall z \in D$$



hten die Folge $z_n \to z_0$ gegeben durch

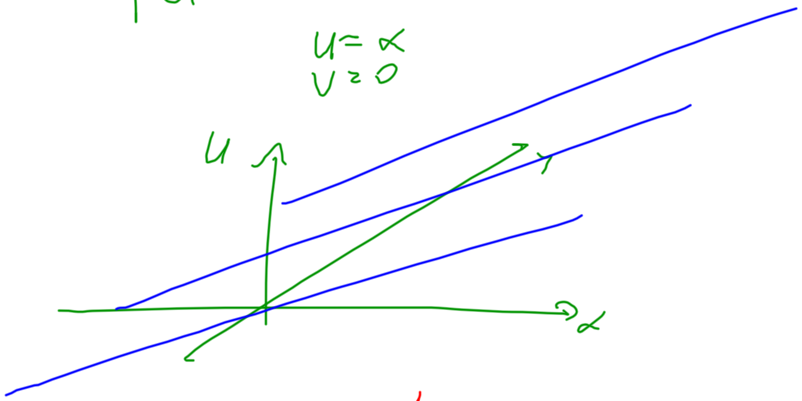
$$z_n = z_0 + \frac{1}{n}$$

er Differenzenquotient für alle $n \in \mathbb{N}$ reell, denn

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = n(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{R} \xrightarrow{n \to \infty} \text{reel}$$

Bspl $\qquad f(z) = u + iv = x$

$$u = x$$
$$v = 0$$



falls f holomorph $\Rightarrow f' = 0$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{x - x_0}{\underbrace{(x - x_0) + i(y - y_0)}} = \nexists$$

$$z = z_0 + \frac{1}{n} \Rightarrow y = y_0 \qquad \Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$$z = z_0 + \frac{i}{n} \Rightarrow x = x_0 \qquad \Rightarrow \lim \frac{0}{0 + i(y - y_0)} = 0$$

$f(z) = x$ nicht holomorph

$$= f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[f'(z_0) \frac{z - z_0}{z - z_0} \right]$$

$f(z)$ ist komplex differenzierbar in z_0

- $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$
- $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$

nun mit $z = x + i\,y$ die **Darstellungen**

$$f(z) = u(z) + i\,v(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$= f(z_0) + \gamma(z - z_0) + \varepsilon(z)\,|z - z_0|$

$[x - x_0 + i(y - y_0)]$

$$f'(z_0) =: \gamma = \alpha + i\,\beta$$

wir: $f'(z_0)(z - z_0) = \gamma(z - z_0) = (\alpha + i\beta)(z - z_0)$

$$u(z_0) + \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + \mathrm{Re}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

$$v(z_0) + \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + \mathrm{Im}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

ibweise lautet dies

$$= \begin{pmatrix} u(z_0) \\ v(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon(z) \cdot |z - z_0|$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{Df(x_0,y_0)}_{2\times 2} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(x_0,y_0)$$

$$f(z) = x \qquad u = x, \quad v = 0$$

$$u_x = 1 \neq 0 = v_y$$

$$u_y = 0 = 0 = -v_x$$

CR Regel

$$u_x - v_y = 0$$

$$u_y + v_x = 0$$

$n = 2 \quad (x, y)$

$m = 2 \quad (u, v)$

$k = 1$

linear

$f(z)$ komplex differenzierbar in $z_0 \in D$, so folgt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i\, v_x(z_0) = v_y(z_0) - i\, u_y(z_0)$$

morph auf D, so gilt

$$= \quad u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad = \Delta v$$

r Real– als auch der Imaginärteil von f erfüllen die Laplace-

Bspl: $u = x$ $\quad \Delta u = 0$ (Int. Bed. erfüllt)

Ich w. $v = 0 \Rightarrow f = u + iv$ nicht holomorph

$v_x = -u_y = 0 \Rightarrow v = v(y)$

$v_y = u_x = 1 \Rightarrow v' = 1 \Rightarrow v = y + c$

$(\Delta v = 0)$

$f(z) = x + iy + c = z + c$

Alle holomorphen Fkt. mit $u = x$

$\Rightarrow f(z) = z + c$!

$$\left(f(z)\,g(z)\right)' =$$

$$\lim \frac{f(z)\,g(z) - f(z_0)\,g(z_0)}{z - z_0} =$$

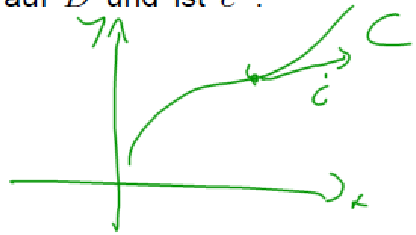
$$= \lim \frac{\left(f(z) - f(z_0)\right) g(z) + f(z_0)\left(g(z) - g(z_0)\right)}{z - z_0} =$$

$$= \lim g(z) \lim \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim f(z_0) \lim \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

$$= g(z_0)\, f'(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0)$$

ısregeln:

te Kettenregel: Ist $f(z)$ holomorph auf D und ist c :
eine C^1–Kurve in D, so gilt



$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t)$$

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(c(t)) &= \frac{d}{dt} u(c(t)) + i \frac{d}{dt} v(c(t)) \\ &= (u_x \dot{c}_1 + u_y \dot{c}_2) + i\,(v_x \dot{c}_1 + v_y \dot{c}_2) \end{aligned}$$

ıaben wir

$$\begin{aligned} c(t)) \cdot \dot{c}(t) &= (u_x + i\,v_x) \cdot (\dot{c}_1 + i\,\dot{c}_2) \\ &= (u_x \dot{c}_1 - v_x \dot{c}_2) + i\,(v_x \dot{c}_1 + u_x \dot{c}_2) \end{aligned}$$

ıe sind wegen der C.R. DGL's identisch.

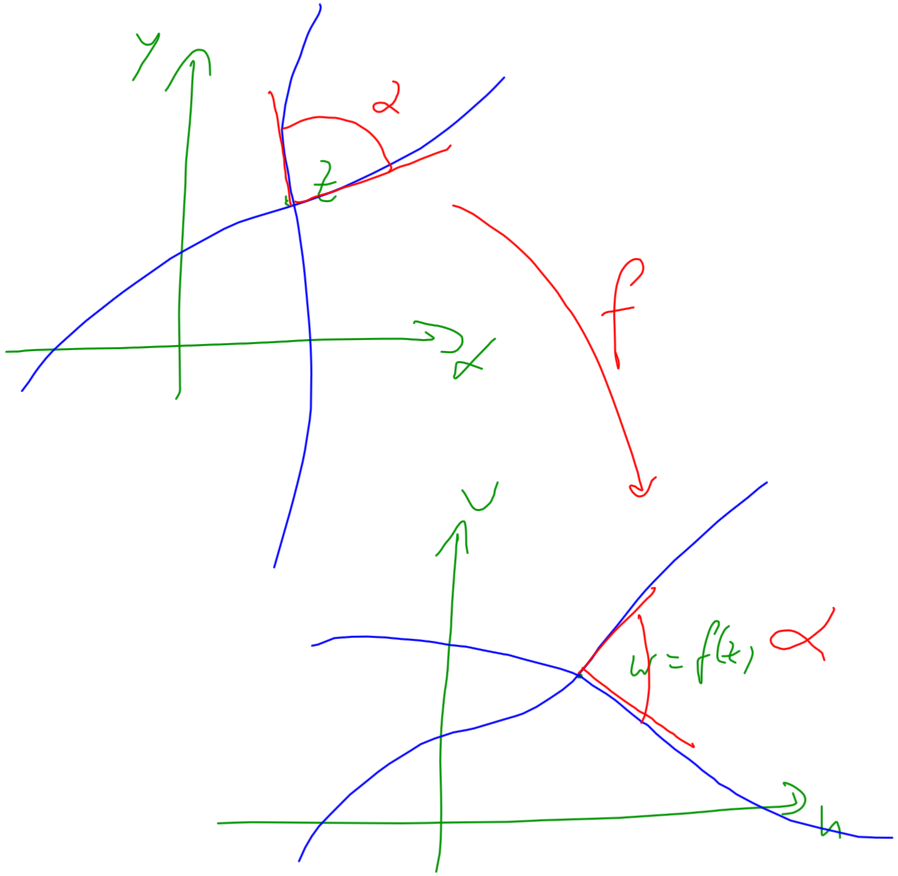
51

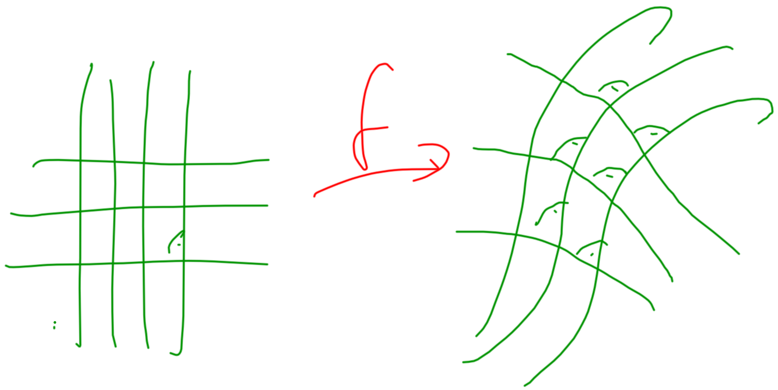
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$(e^z)' = 0 + 1 + \frac{2z}{2!} + \frac{3}{3!}z^2 + \dots$$

$$= 0 + 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$\overset{!}{=} e^z$$


y
x
z
α
f
v
u
w = f(z)
α

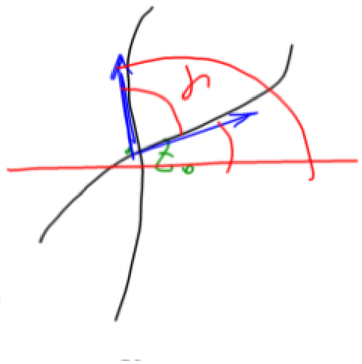

f

Teil 1))

zwei Kurven, die für $t = 0$ durch den Punkt z_0 laufen, d.h.

$$c(0) = d(0) = z_0$$

ngentialvektoren in diesem Punkt sind dann



$$\dot{c}(0) \quad \text{und} \quad \dot{d}(0)$$

nkel γ zwischen den Tangentialvektoren gilt

$$= \measuredangle\left(\dot{c}(0), \dot{d}(0)\right) = \arg\left(\dot{c}(0)\right) - \arg\left(\dot{d}(0)\right)$$