V6 Kompl. Fktn. 7.5.10

$z = x + iy$

$f = u + iv = u(x,y) + i\,v(x,y)$

f (kompl.) diffb. $\Longleftrightarrow$ CRDgl
$u_x = v_y$
$u_y = -v_x$

$f' = u_x + i v_x$

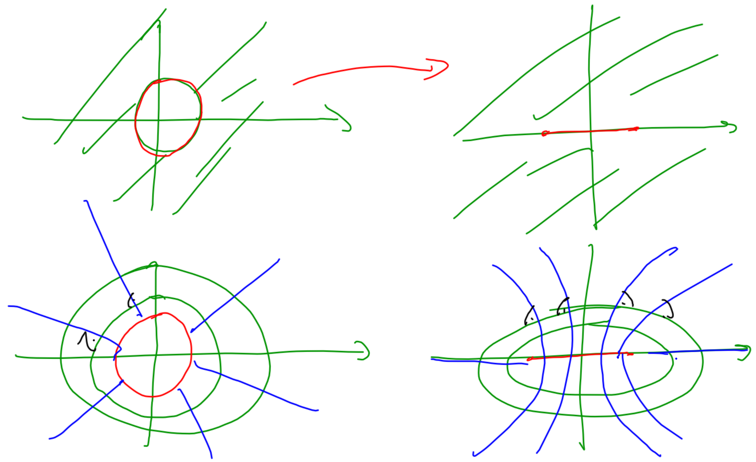
---

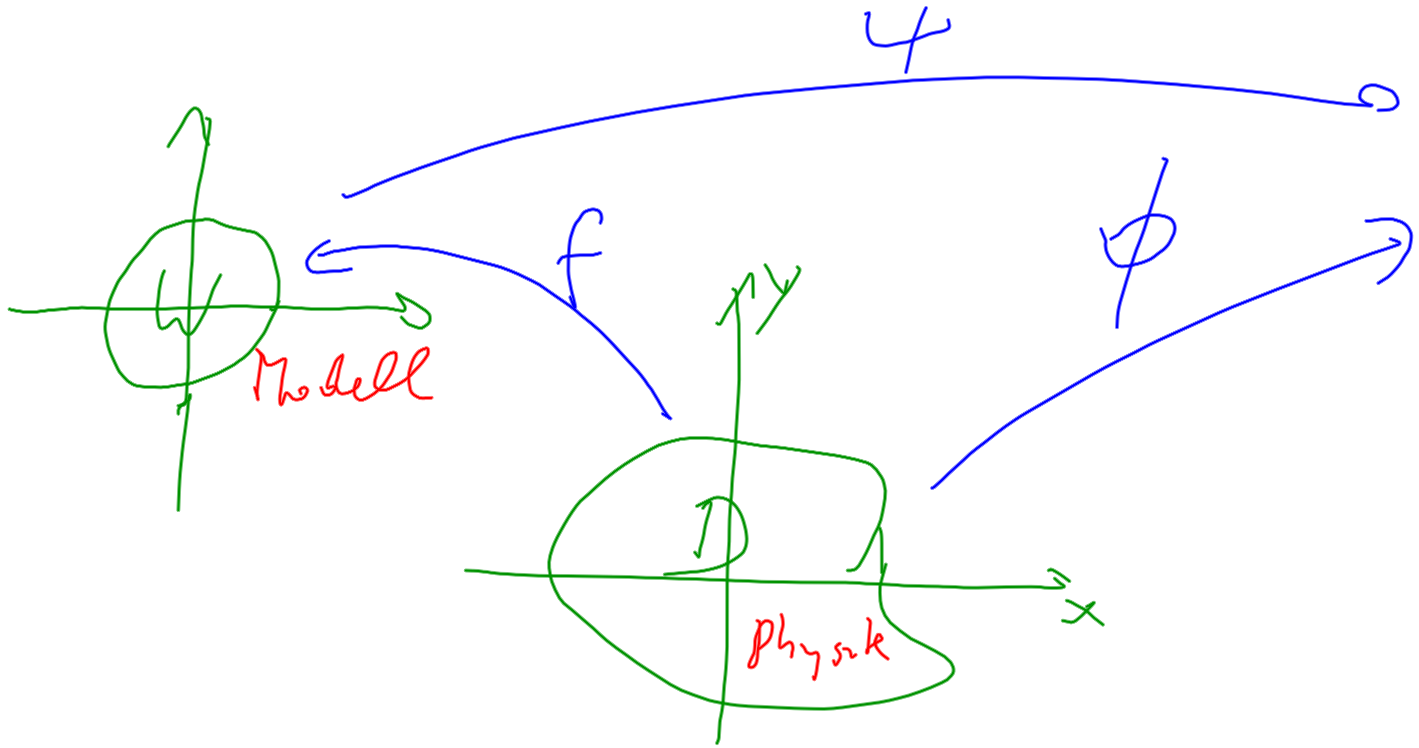
f diff (kompl.) $\wedge$ $f' \neq 0$

Konforme Abb.

Bspl $\quad f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$





$$\psi \circ f = \phi \quad : D \to \mathbb{R}$$

$$\psi = \phi \circ f^{-1} \quad : W \to \mathbb{R}$$

Daraus folgt aber $\Phi = \Psi \circ f$ und mit $f = u + i\,v$

$$\Phi(x,y) = \Psi(u(x,y), v(x,y))$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= \Psi_u u_x + \Psi_v v_x \\
\Phi_y &= \Psi_u u_y + \Psi_v v_y
\end{aligned}$$

Für den komplexen Gradienten gilt dann

$$\begin{aligned}
\text{grad}\,\Phi(z) &= (\Psi_u u_x + \Psi_v v_x) + i\,(\Psi_u u_y + \Psi_v v_y) \\
&= \Psi_u(u_x + i\,u_y) + \Psi_v(v_x + i\,v_y) \\
&\stackrel{CR}{=} \Psi_u(u_x - i\,v_x) + i\,\Psi_v(u_x - i\,v_x) = (\Psi_u + i\,\Psi_v)\underbrace{(u_x - i\,v_x)}_{\overline{f'}} \\
&= \text{grad}\,\Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}
\end{aligned}$$

<u>f kompl. diffb.</u>

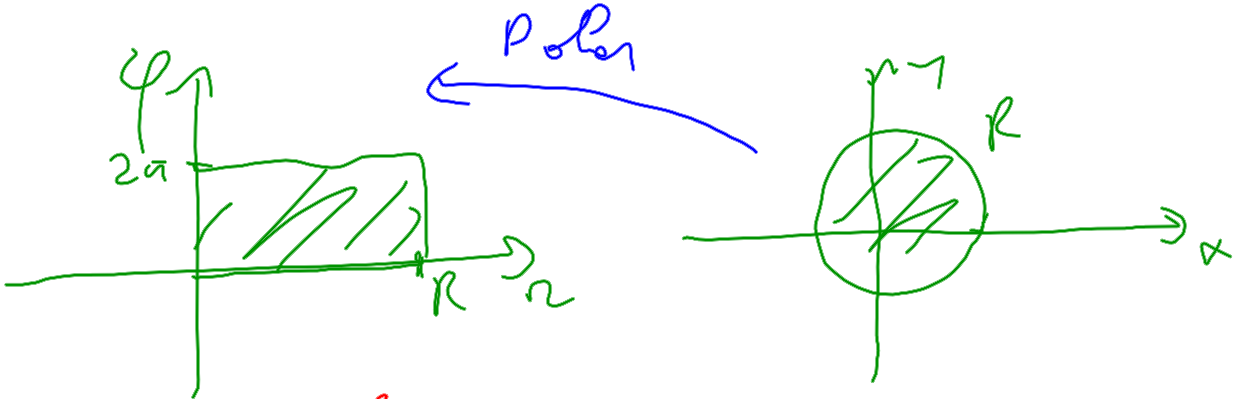
$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Psi_{uu}(u_x^2+u_y^2)+2\Psi_{uv}(u_xv_x+u_yv_y)\\ &\quad +\Psi_{vv}(v_x^2+v_y^2)+\Psi_u\Delta u+\Psi_v\Delta v\end{aligned}$$

$f' = u_x + i v_x$

Wir verwenden nun wieder die CR–DGL's und erhalten

$u_y = -v_x$

$$\begin{aligned}u_x^2+u_y^2 &= \cancel{v_x^2+v_y^2} = u_x^2+v_x^2 = |f'(z)|^2\\ u_xv_x+u_yv_y &= 0\\ \Delta u &= \Delta v = 0\end{aligned}$$



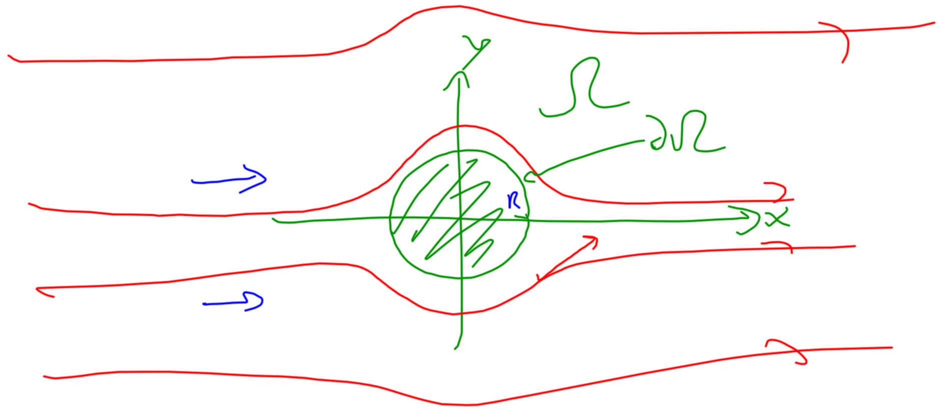
nicht konform

$x = r\cos\varphi \qquad u = r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\sin\varphi \qquad v = \varphi = \arctan\frac{y}{x}$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = u_x \neq v_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\psi = 0 \qquad \Delta_{x,y}\,\phi = 0$$



Physik

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

$$\nabla u = (v_\infty, 0) \quad \text{für } z \to \infty$$

$y = y(x)$ für eine rote Kurve

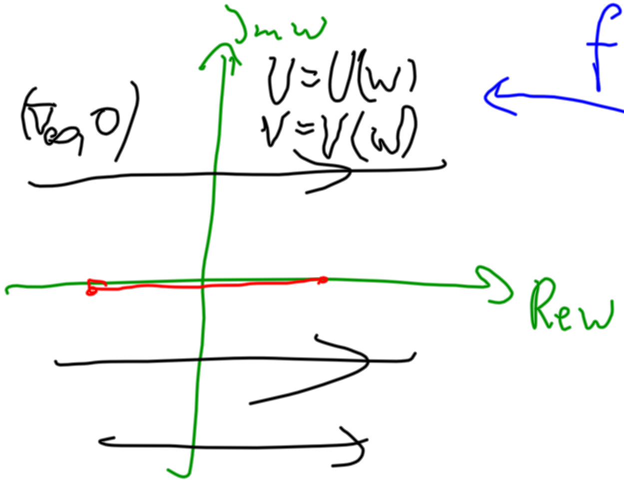
$$y'(x) = \frac{w_2}{w_1}$$

$$w_1 y'(x) - w_2 = 0$$

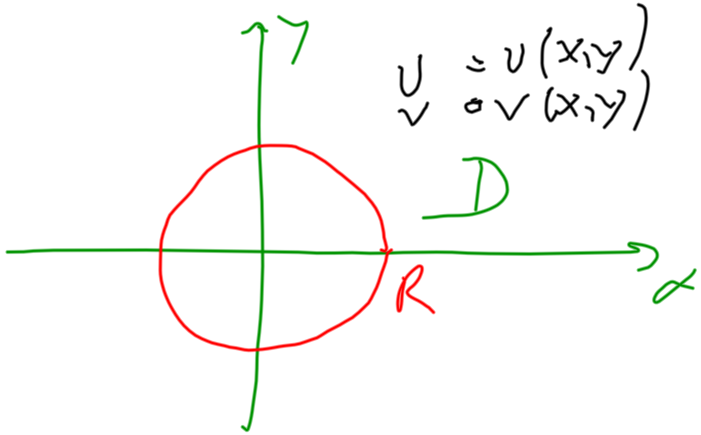
$$-v_y \, y'(x) - v_x = 0$$

$$-v_y(x,y)\, y'(x) - v_x(x,y) = 0$$

$$\frac{d}{dx} v(x, y(x)) = 0$$



$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right)$$



$$\operatorname{grad}_z v(z) = v_x + i v_y$$

In der **physikalischen Ebene** können wir annehmen, dass

RB im ∞

$$\lim_{z\to\infty} \operatorname{grad} \Psi(z) = -v_\infty$$

gilt, d.h. im Unendlichen spürt die ungestörte Strömung kein Hindernis.
Wegen der Beziehung

$$-V_\infty \xleftarrow{z\to\infty} \operatorname{grad} \Psi(z) = \underbrace{\operatorname{grad} \Psi(f(z))}_{\xrightarrow{w\to\infty}\, -\bar{V}_\infty} \cdot \overline{f'(z)}$$

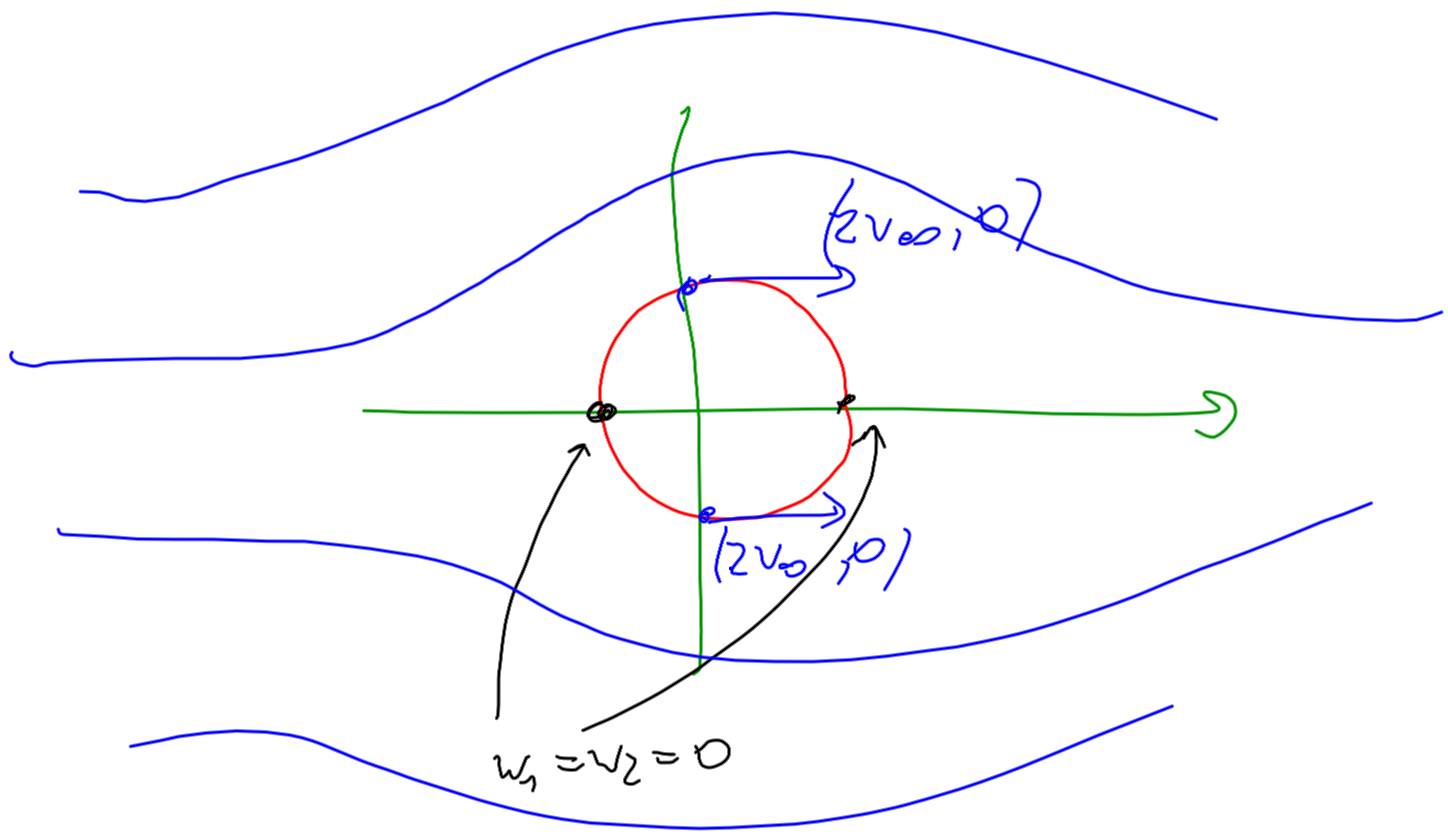
folgt mit

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{R}{z^2}\right) \xrightarrow{z\to\infty} \frac{1}{2R}$$

die Beziehung $\boxed{\bar{v}_\infty = 2Rv_\infty.}$

Für das komplexe Strömungspotential gilt dann

$$\Psi(w) = -2Rv_\infty(\operatorname{Re} w + i \operatorname{Im} w)$$

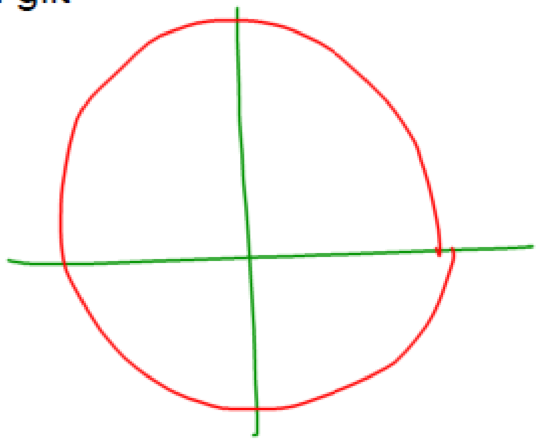


(2v∞, 0)
(2v∞, 0)
w1 = w2 = 0

$r\cos t + i\, r \sin t$

Beispiel 1:

Sei $f(z) = z$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt



$$\begin{aligned}
\oint\limits_c z\, dz &= \int_0^{2\pi} re^{it} \cdot (rie^{it})\, dt \\
&= ir^2 \int_0^{2\pi} e^{2it}\, dt \\
&= ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i \sin(2t))\, dt \\
&= -r^2 \int_0^{2\pi} \sin(2t))\, dt + i\, r^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t))\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Beispiel: Ebene Potentialströmung

Wir wollen das Geschwindigkeitsfeld einer stationären, wirbel– und quellenfreien Umströmung eines Zylinders berechnen. Sei

$$\mathrm{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

das gesuchte Geschwindigkeitsfeld. Dann gilt also

$$= \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\mathrm{w} &= \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \\ \text{div}\,\mathrm{w} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad = \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial(-w_2)}{\partial y} =$$

Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend, so folgt aus der ersten Beziehung

$$\exists\, u : D \to \mathbb{R} \;:\; \nabla u = -\mathrm{w}$$

beziehungsweise aus der zweiten Beziehung

$$\exists\, v : D \to \mathbb{R} \;:\; \nabla v = (w_2, -w_1)^T$$

$$\operatorname{div} w = -\operatorname{div} \nabla u = \boxed{-\Delta u = 0}$$

$$\boxed{\Delta v = 0}$$