VO Kompl. Fktn 11. 6. 10

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z - z_0} \, dz$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

f holomorph

$$0 = \oint f(z) \, dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

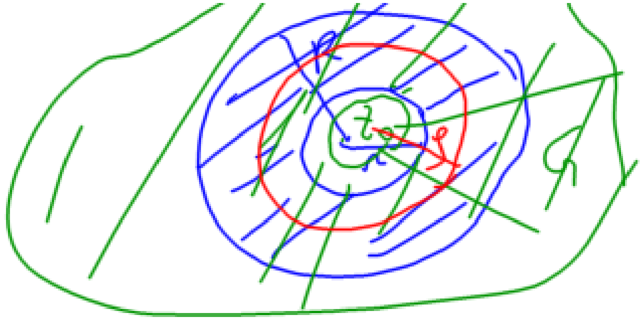
$z_0 = 0$

$|z| < 1$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$z_0 = 0$

$|z| = \infty$




### 3.4 Singularitäten, Residuen

**Satz:** (Laurent–Entwicklung)

1) Sei $f(z)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C}$ (Entwicklungs-punkt), $0 < \bar{r} < \bar{R}$ mit

$$K_{\bar{r},\bar{R}}(z_0) := \{z \,:\, \bar{r} < |z - z_0| < \bar{R}\} \subset G$$

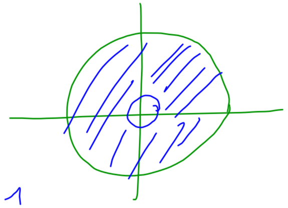
Dann ist $f(z)$ auf $K_{\bar{r},\bar{R}}(z_0)$ in eine **Laurent–Reihe** entwickelbar:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \bar{r} < |z - z_0| < \bar{R}$$

2) Für die Koeffizienten gilt ($\bar{r} < \rho < \bar{R}$)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad z_0 = 0, \quad |z| < 1$$



$a_k = 1 \quad k \geq 0$

$a_k = 0 \quad k < 0$

also auf $\forall r > 0, r < 1$

$r < |z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{z^i} =$$

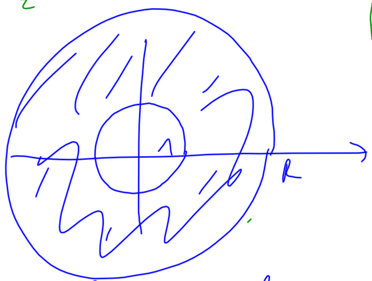
$$= -\sum_{j=-1}^{-\infty} z^j$$

$\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$|z| > 1$

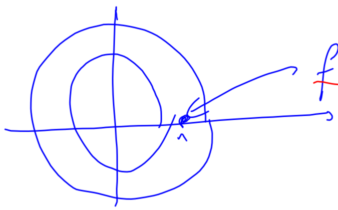
$a_k = 0 \quad k \geq 0$

$a_k = -1 \quad k < 0$

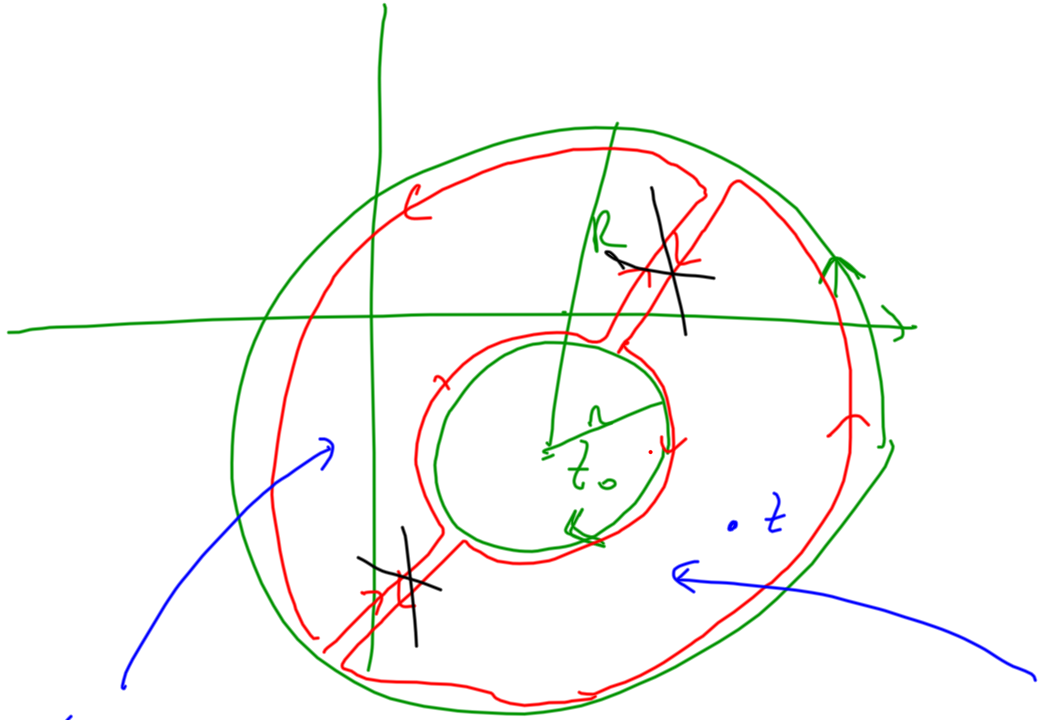



also auf $\forall R > 1$ auf

$1 < |z| < R$

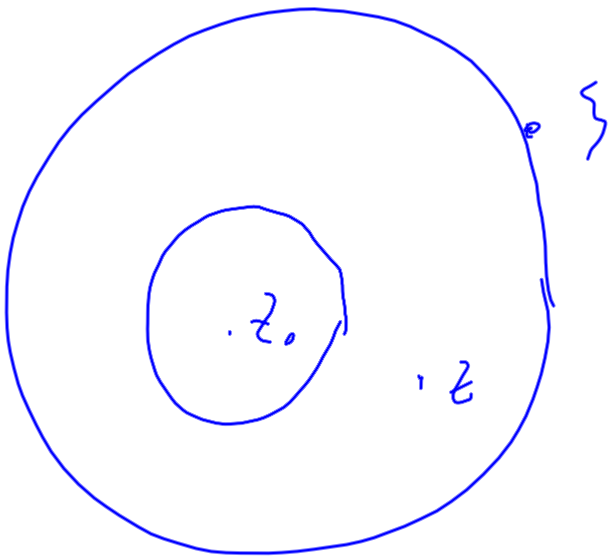


f nicht holomorph



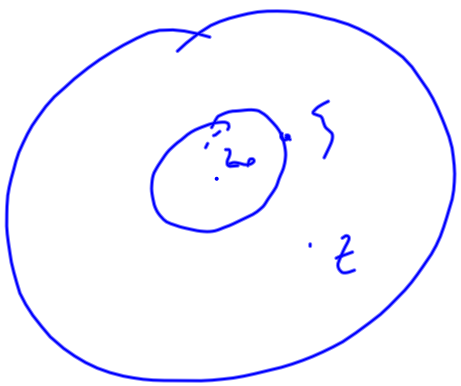

$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ holomorph

1.)




$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$$

2.)




$$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| < 1$$

Setzt man diese Formel in das Kurvenintegral ein, so folgt direkt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\overbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta}^{a_k}\right](z - z_0)^k$$

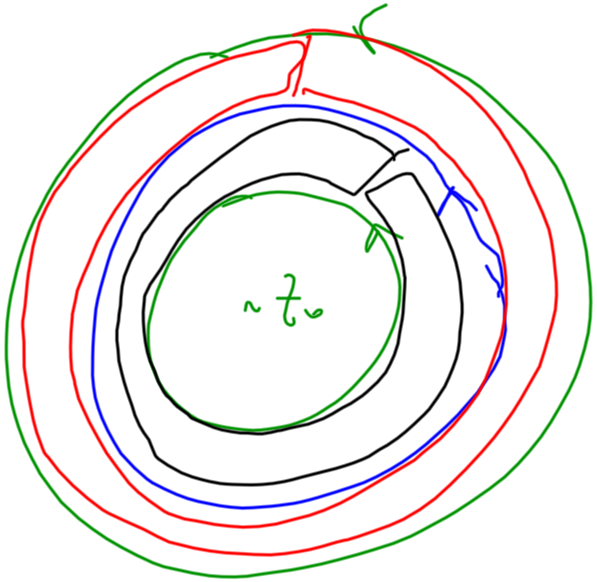
Sei nun $\zeta$ ein Punkt auf $c_r$, d.h. $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{z - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\
&= -\frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\frac{1}{z - z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^k = (*) \\
(**) &= -\sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \qquad (m = -(k+1))
\end{aligned}$$

$$(*) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{i-1}}{(z - z_0)^{i}} =$$



$$= -\sum_{j=-1}^{-\infty}\frac{(z - z_0)^{j}}{(\zeta - z_0)^{j+1}} = (**)$$




$$\oint = 0$$

$$\oint = 0$$

**Bemerkung:**

1) Die Laurent–Entwicklung von $f(z)$ ist bei vorgegebenem Kreisring **eindeutig** bestimmt.

2) Ist $f(z)$ holomorph im gesamten Kreis $\overline{K_{\bar{R}}(z_0)}$, so gilt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes für $k = -1, -2, -3, \ldots$ die Beziehung

$$a_k = 0$$

$-k-1 \geq 0$

und die Laurent–Entwicklung stimmt dann mit der Taylor–Entwicklung überein.

$k<0 \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint \underbrace{\underbrace{f(\zeta)}_{\text{holo}} \underbrace{(\zeta - z)^{-k-1}}_{\text{holo}}}_{\text{holo}} d\zeta = 0$

in $\overline{K_{\bar{R}}(z_0)}$

**Beispiel:**

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und Kreisring $0 < |z| < \infty$.

Mit der Taylor–Entwicklung

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}$$

erhalten wir die Laurent–Reihe

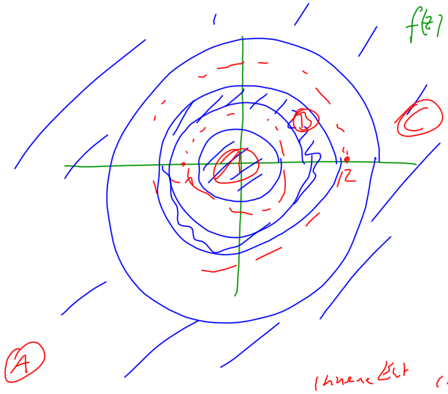
$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

$a_k = 0, \; k < -1$

$a_{2k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

112

$$f(z) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{z-2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{z+1}$$




(A)

$|z|<1$

Innere Ent     innere Ent

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\underline{-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k}} \underline{- \sum_{k=0}^{\infty} z^k}\right) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(+\frac{1}{6}\,\frac{1}{2^k} + 1\right) z^k$$

$|z|<1$

$a_k = 0 \quad k<0$     Laurent = Taylor

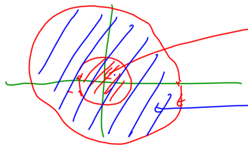
(C)

$$\boxed{\frac{1}{1+z}} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}$$

$$= \sum_{i=-1}^{-\infty} z^i \qquad |z|>1$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}} =$$

$$= \sum_{i=-1}^{-\infty}\frac{z^i}{2^{i-1}} \qquad |z|>2$$



Innere Entw. $\frac{1}{1+z}$

Innere Ent $\frac{1}{z-2}$

$$f(z) = \sum_{i=-1}^{-\infty}\left(1 + \frac{1}{2^{i-1}}\right) z^i$$

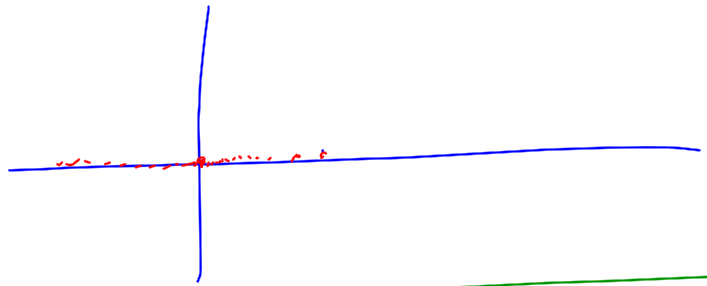
beide äußere Entw.

$\sin \frac{1}{z}$

$z = \frac{1}{k\pi}$ isolierte Σ.
einfache Pole

$z = 0$ nicht isoliert

$$\frac{1}{k\pi} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

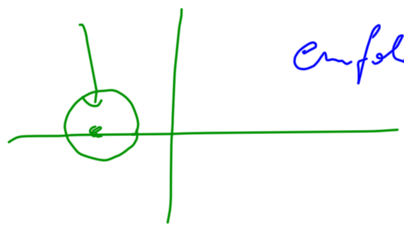


$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{i=-1}^{-\infty} z^i = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \qquad |z|>1$$

$\not\Rightarrow$ $z=0$ wesentl. Singulär

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{nicht singulär} \qquad |z|<1$$

$z = -1$



einfacher Pol