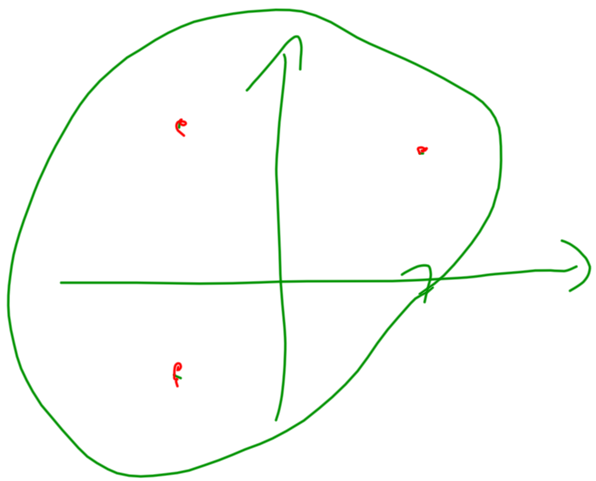
Vo Kompl. Fkt. 25.5.10

Res. Satz

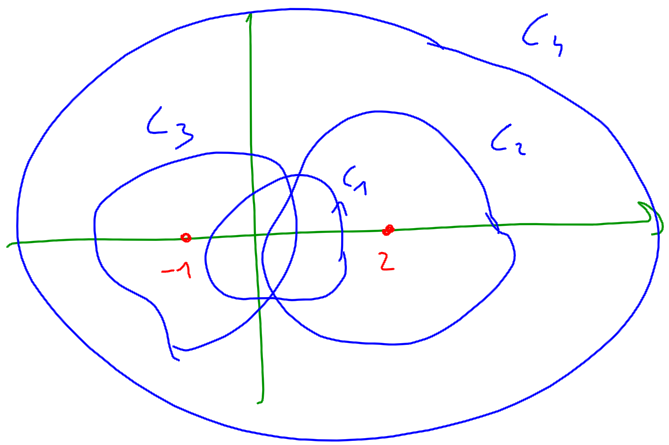
$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\text{Res } z_k} \mathrm{Uml.}(c, z_k)\,\mathrm{Res}(f, z_k)$$



$$\mathrm{Res}(f, z_k) = a_{-1}$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_k)^k$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$



$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i \,\frac{1}{3}$$

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\int_{C_4} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Beispiel: Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

hat bei $z_0 = i$ einen Pol zweiter Ordnung. Nach dem letzten Satz, Teil 3), gilt

$$\text{Res}\,(f; i) = g'(i) = -\frac{3}{4e}$$

wobei die Funktion $g(z)$ aufgrund der Darstellung

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

$= g(z)$

$\text{Res} = \frac{g'(i)}{1!}$

durch

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

gegeben ist.

$g'(z) = \frac{i e^{iz}}{z(\quad)} - \frac{e^{iz}}{z^2(\quad)^2} - 2\frac{e^{iz}}{z(\quad)^3}$

131

$$f(z) = z\, e^{\frac{1}{z}} = z\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots\right)$$

$$= z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \dots$$

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$$

wesentl. Singul $z_0 = 0$ (isoliert)

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3} \qquad z_0 = 1$$

$$g(z) = e^z$$

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \left.\frac{(e^z)''}{2!}\right|_{z=1} = \frac{e}{2}$$

$$f(z) = \frac{z^4 - 3}{z-2} \qquad z_0 = 2$$

$$g(z) = z^4 - 3 \qquad \Rightarrow g(z_0) = \mathrm{Res}(f, 2) = 13$$

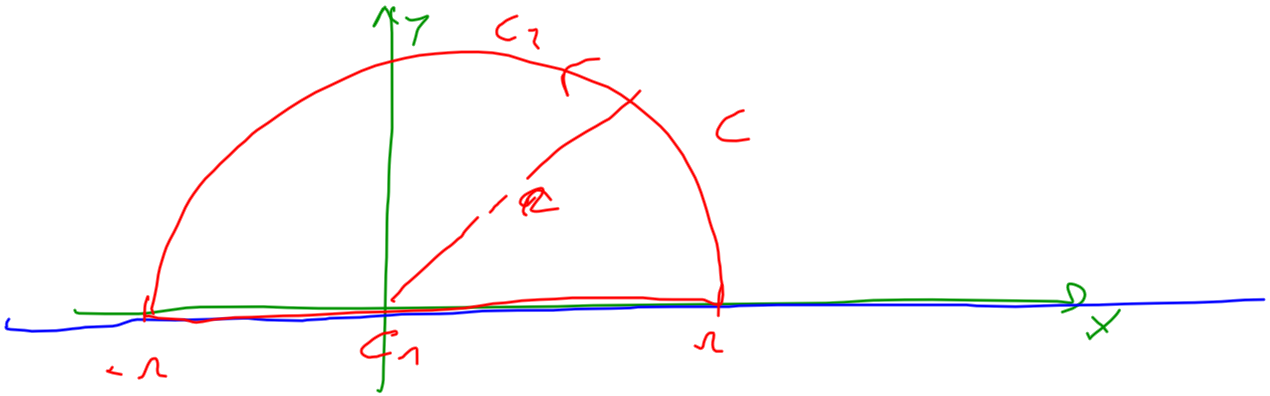
$$f(z) = \frac{1}{z^8 - 1} \qquad z_0 = 1$$

$$(z^8 - 1) = (z-1)\underbrace{(\dots\dots)}_{g(z_1),\ \dots\ g(z_n)}$$

$$p(z) = 1$$

$$q(z) = z^8 - 1 \qquad q'(z) = 8z^7$$

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \left.\frac{1}{8z^7}\right|_{z=1} = \frac{1}{8}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$$

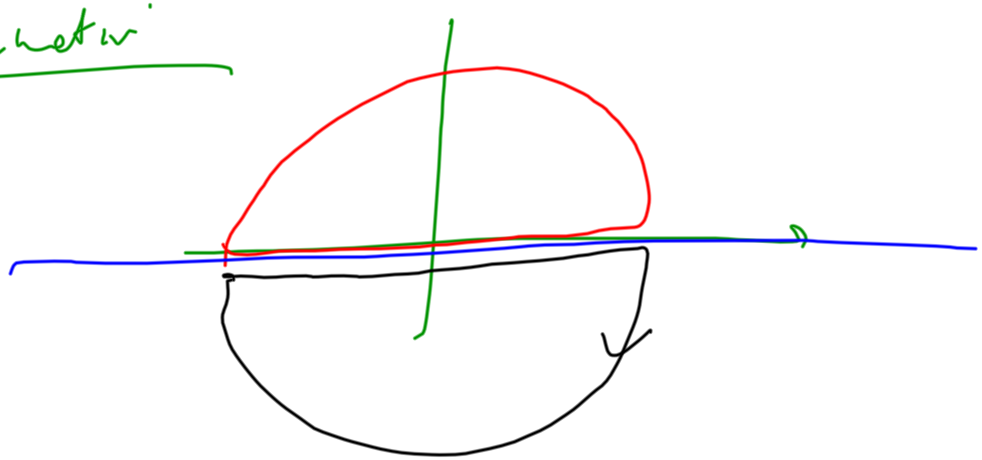
$$\oint_{C} R(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}$$

$R \to \infty$

$$\int_{C_1} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \qquad \boxed{\int_{C_2} \longrightarrow 0}$$

$$\oint_{C} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

Alternativ



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

z. B.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx = -2\pi i \left(-\frac{1}{6}\left(e^{-\frac{i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{2}} + e^{-\frac{i5\pi}{6}} \right) \right)$$

$$=$$

nicht gebr. rat weil

Beispiel: Wir untersuchen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2}\,dx, \quad a>0, \quad \omega>0$$

keine reele Nst

Der letzte Satz läßt sich nicht direkt anwenden, aber wegen

$z = x + iy$

$$\left|\frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}\right| = \frac{e^{-\omega y}}{|z^2+a^2|} \le \frac{1}{|z^2+a^2|} \le \frac{c}{|z|^2} \qquad (y \ge 0)$$

$$\int_{c_2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

entlang des Weges c_2, gilt die Aussage analog.
Wir erhalten also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}; z_k\right) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}; ia\right)$$

$$= \underbrace{\frac{e^{i\omega z}}{(z+ia)}}_{f(z)} \frac{1}{(z-ia)}$$

$$\int_{c_1} \xrightarrow{R\to\infty} \qquad \int_c \xrightarrow{R\to\infty}$$

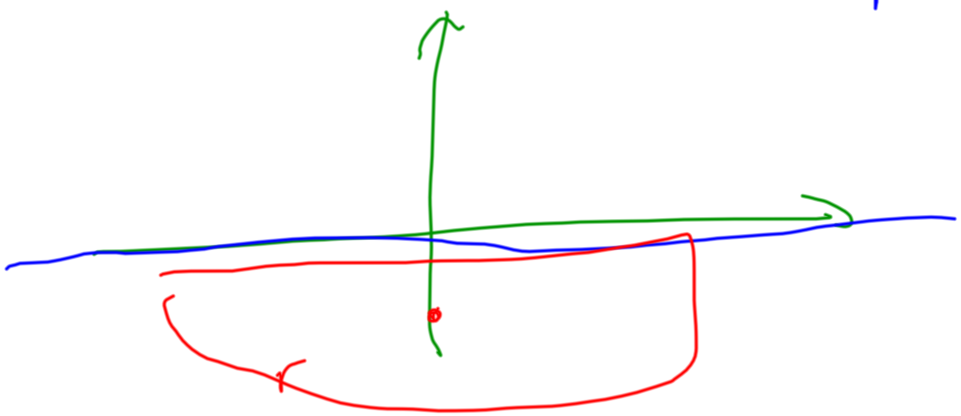
$$= 2\pi i \left.\frac{e^{i\omega z}}{2z}\right|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x^2+a^2}\,dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2}\,dx \qquad a>0\ ,\ \omega<0$$

$$\left|\frac{e^{i\omega t}}{x^2+a^2}\right| \leq \frac{e^{-\omega y}}{|x^2+a^2|} \leq \frac{1}{|x^2+a^2|}$$

falls $y \leq 0$



Weitere Anwendungen: (ohne Beweis)

Satz:

Sei $f(z)$ holomorph auf $\{z \,:\, \operatorname{Im} z > -\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten in der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$.
Gilt

$$\lim_{|z|\to\infty, y\geq 0} f(z) = 0,$$

so folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}; z_k\right)$$

Beispiel: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx = 0$$

$\operatorname{Im} = z i$

136

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = \begin{pmatrix} w = 1 \\ a = 1 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{e}$$

$$\int_{C_1} \xrightarrow{R\to\infty} \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \mathrm{CHW}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

i.e. $\neq \lim_{\substack{R_1\to\infty \\ R_2\to\infty}}\int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx$

$$\int_{-R}^{R} x\,dx = \frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{2} = 0$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,dx = 0 = \mathrm{CHW}\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$$

aber $\int_{0}^{\infty} x\,dx \;\nexists.$

$z = r e^{i\varphi} \qquad dz = i e^{i\varphi} r \, d\varphi$

$$\left| \int_{c_2} f(z)\, e^{iz}\, dz \right| = \left| \int_0^\pi f(re^{i\varphi})\, e^{i r e^{i\varphi}}\, r\, i\, e^{i\varphi}\, d\varphi \right|$$

$|e^{i r e^{i\varphi}}| = e^{-r \sin\varphi}$

$$\leq M(r) \int_0^\pi r\, e^{-r \sin\varphi}\, d\varphi\,,$$

wobei $M(r) := \max\{|f(z)| : |z| = r,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$.

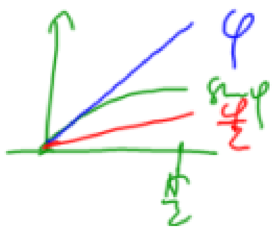
Zur Abschätzung verwenden wir nun $\sin\varphi \geq 2\varphi/\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

$$\int_0^\pi r\, e^{-r \sin\varphi}\, d\varphi = 2r \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\varphi}\, d\varphi \leq 2r \int_0^{\pi/2} e^{-2r\varphi/\pi}\, d\varphi$$

$$= -\frac{2r}{2r/\pi}\, e^{-2r\varphi/\pi} \Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} = \pi\,(1 - e^{-r}) \leq \pi.$$

Damit folgt $\int_{c_2} f(z)\, e^{iz}\, dz \to 0,\quad r \to \infty.$ $\square$

$e^{-r\sin\varphi} \leq e^{-r \varphi \frac{2}{\pi}}$



164

Satz (11.7)

Ist R eine rationale Funktion in den Variablen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ keine Singularitäten hat, so gilt:

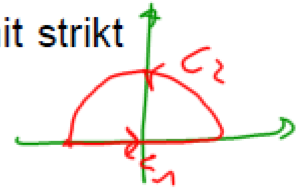
$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt \;=\; 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z}\, R\Big(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2}\Big); z\Big].$$

Beweis: Die rechte Seite lässt sich mittels Residuensatz als Integral schreiben:

$z = e^{it}$, $\quad \sin t = \operatorname{Im}(e^{it}) = \left(z - \frac{1}{z}\ \frac{1}{2i}\right)$

$\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{2}$

Ist r hinreichend groß, so liegen alle Singularitäten z_k von $r(z)$ mit strikt positivem Imaginärteil innerhalb der Kurve $c_1 + c_2$.



Daraus folgt

$$2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{Res}\,(R; z_k) = \oint_{c_1 + c_2} r(z)\, dz = \int_{c_1} r(z)\, dz + \int_{c_2} r(z)\, dz$$

Nun gilt

$$\int_{c_1} r(z)\, dz = \int_{-r}^{r} r(z)\, dz \to \int_{-\infty}^{\infty} r(z)\, dz \qquad (r \to \infty)$$

Weiter berechnet man

$$\left| \int_{c_2} r(z)\, dz \right| \leq \max_{|z|=r} |r(z)| \cdot \pi r \leq \pi r \frac{c}{r^2} \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

Beachtung !!

Daraus folgt direkt die Behauptung.