Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3

Aufgabe 1:

a) Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Streifen $S := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 0 \leq \mathrm{Im}\,(z) \leq 2\}$ auf den Kreisring $R := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \leq |\, z - (1+i)\,| \leq 3\}$ abbildet.

b) Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Keil $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ so auf den Parallelstreifen $-c < \mathrm{Im}\, z < c$; $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 1$ abbildet, dass die Symmetrie bezüglich der reellen Achse erhalten bleibt und der Punkt $z = 1$ in $w = 1$ übergeht. Zeichnen Sie die Bilder der Strahlen $\arg z = +\frac{\pi}{3c}, -\frac{\pi}{3c}, +\frac{\pi}{6c}, -\frac{\pi}{6c}$ und die Bilder der Kreisabschnitte mit $|z| = e^{\frac{\pi}{3c}}, e^{\frac{\pi}{6c}}$ und $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$.

Aufgabe 2: Gegeben sei die stereographische Projektion $\mathbb{C}^* \to K \subset \mathbb{R}^3$,

$$z = x + iy \mapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) =: Z =: (X_1, X_2, X_3)$$

a) Die Punkte der Bildmenge können natürlich auch in Kugelkoordinaten angegeben werden. Wegen $r = 1$ genügen dann zwei Parameter ϕ (Längengrad) und θ (Breitengrad) zur eindeutigen Festlegung eines Bildpunktes.

   (i) Welche Punkte aus $\mathbb{C}^*$ werden auf einen festen Längengrad (ϕ konstant) abgebildet?

   (ii) Welche Punkte aus $\mathbb{C}^*$ werden auf einen festen Breitengrad (θ konstant) abgebildet?

b) Das sphärische Bild des echten Kreises

$$C := \{z \in \mathbb{C} \,:\, z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + c\bar{c} - R^2 = 0\}$$

auf der Riemannkugel sei ein Großkreis, d.h. ein Kreis mit Radius 1. Zeigen Sie, dass dann für den Radius R des Urbildkreises C die Gleichung $R^2 = |c|^2 + 1$ gilt.

Hinweis:
Zur geometrische Lösung nutzen Sie aus: wenn Z auf einem Großkreis liegt, so liegt auch $-Z$ auf demselben Großkreis.

Zur analytischen Lösung zeigen Sie zusätzlich: Ist $Z = (X_1,\, X_2,\, X_3)^T$ das sphärische Bild von $z = x + iy$, dann ist $-Z = (-X_1,\, -X_2,\, -X_3)^T$ das sphärische Bild von $-\dfrac{1}{\bar{z}}$.

Aufgabe 3) Hinweis : Sie brauchen keine konkrete Transformation anzugeben.

a) Zeigen Sie, dass jede Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$, die den Rand des Kreises $C_1 := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ so auf einen echten Kreis C_2 abbildet, dass der Mittelpunkt von C_1 in den Mittelpunkt von C_2 übergeht, eine lineare Abbildung seien muss.

Gegeben seien nun der Mittelpunkt M und der Radius R des Bildkreises (z.B. $M = 3 + i$, $R = 5$). Ist dann die Abbildung eindeutig festgelegt?

b) (Klausur SoSe 09 Aufg.1b, Hinze/Kiani) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ fest vorgegeben. Welche der folgenden Gebiete können mittels **einer** Möbiustransformation auf einen Sektor der Form

$$S := \left\{ w \in \mathbb{C} : w = r\, e^{i\phi},\, r \in \mathbb{R}^+,\, -\pi < \varphi_1 < \phi < \varphi_2 < \pi \right\}$$

abgebildet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

(i)
$$G_1 := \{ z \in \mathbb{C} : \alpha < |z| < \beta \} .$$

(ii)
$$G_2 := \{ z \in \mathbb{C} : \alpha < \mathrm{Re}\,(z) < \beta \} .$$

(iii)
$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha|\,,\, |z - \beta| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha| \right\} .$$

Aufgabe 4: (Teile a,b,c : Wiederholungsklausur WiSe 09/10, Aufg.1, Hinze/Kiani)

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(i) = 0\,, \qquad T(0) = 2\,, \qquad T(2i) = \infty\,.$$

b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T.

(i) $K :=$ imaginäre Achse,
(ii) $K_2 := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \}$,
(iii) $\tilde{K} :=$ reelle Achse.

c) Bestimmen Sie das Bild der Viertelebene

$$S := \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0,\, \mathrm{Im}\,(z) > 0 \}\,.$$

d) Bestimmen Sie das Bild von

$$H := \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 3 \}\,.$$

Abgabetermin: 3. Mai 2011.