Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4

Aufgabe 1:

a) Welche der folgenden Funktionen bzw. deren stetige Fortsetzungen sind im Nullpunkt komplex differenzierbar? Welche der im Nullpunkt differenzierbaren Funktionen ist in einer ganzen Umgebung des Nullpunktes differenzierbar?

$$f_1(z) \;=\; \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z)\,, \qquad f_2(z) \;=\; \frac{z^2}{\bar{z}}$$

$$f_3(z) \;=\; (\mathrm{Re}\,(z)+2)^2 - (\mathrm{Im}\,(z)+2)^2 + i\big[\mathrm{Im}\,(z)(\mathrm{Re}\,(z)+4) \;+\; \mathrm{Re}\,(z)(\mathrm{Im}\,(z)+4)\,\big]\,.$$

b) Bestimmen Sie alle in $D := \{z \in \mathbb{C} : z = x+iy,\, x, y \in \mathbb{R},\, x > 0\}$ holomorphen Funktionen mit

(i) $\mathrm{Re}\,(f(z)) \;=\; 3$ (ii) $\mathrm{Re}\,(f(z)) \;=\; k\,\ln\sqrt{x^2+y^2}\,.$

Aufgabe 2:

a) In welchem Gebiet ist die Möbiustransformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ winkeltreu?

b) Ist es möglich, das Gebiet

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\; \mathrm{Re}\,(z) > 0,\; \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

mittels einer Möbiustransformation auf das Innere eines echten Dreiecks abzubilden? Unter einem echten Dreieck verstehen wir ein Dreieck dessen Eckpunkte im Endlichen liegen.

c) Die Abbildungsvorschrift $f:\; z \to e^{\frac{i\pi}{4}}\,\bar{z}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Offensichtlich verursacht diese keine Längenverzerrungen. Die Größe der Winkel wird ebenfalls erhalten. f ist als Transformation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wo ist f komplex differenzierbar? Wie verträgt sich Ihr Ergebnis mit dem Satz (5.1) der Vorlesung?

d) Das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}\,,\; -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}\,,\, 0 < r < 2\}$
soll bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises transformiert werden. Warum tut es $z \;\mapsto\; \left(\dfrac{z}{2}\right)^8$ nicht?

Aufgabe 3)

a) Gegeben ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := (e^{2y} - e^{-2y})\sin(2x)$.

  (i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist, d.h. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

  (ii) Konstruieren Sie zu u eine konjugiert harmonische Funktion v. D.h.: Bestimmen Sie v so, dass $f(z) = f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$ holomorph wird.

b) Bestimmen Sie die Potenzreihe der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{1+4z^2}$ und deren Konvergenzradius. In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ ist f nicht definiert?
Tipp: Geometrische Reihe!

Aufgabe 4:

Gegeben seien die Kreisscheiben K_1 und K_2 mit Radius 1 um die Mittelpunkte i bzw. $-i$. Die Kreisscheibe K_1 möge ein elektrostatisches Potential von 0 und die Kreisscheibe K_2 ein elektrostatisches Potential von 1 haben. Im Punkt 0 seien die Kreisscheiben gegeneinander isoliert.

Zur Bestimmung des induzierten elektrostatischen Potentials und der Feldstärke soll das Gebiet außerhalb der Kreisscheiben bijektiv und konform auf einen Ring (Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen) oder einen Streifen (Gebiet zwischen zwei parallelen Geraden) abgebildet werden.

Welche der beiden Tansformationen (Ring bzw. Streifen) ist möglich?

Geben Sie eine Transformation an, die das Gewünschte leistet.

Bestimmen sie das induzierte elektrostatische Potential und die Feldstärke außerhalb der Kreisscheiben.

Hinweis: Konstruieren Sie ein Transformation T für die $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $T(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$ gilt. Bei geschickter Konstruktion bleiben die Symmetrien erhalten.

Abgabetermin: 17. Mai 2011.