

## Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 5

**Aufgabe 1:** Gegeben sei eine ebene Strömung mit der Geschwindigkeit  $V \in \mathbb{R}^+$  im Unendlichen um das elliptische Profil

$$\frac{16x^2}{25} + \frac{16y^2}{9} \leq 1.$$

Bestimmen Sie ein Potential der Strömung und die Geschwindigkeit in den Punkten  $(\pm\frac{5}{4}, 0)$  und  $(0, \pm\frac{3}{4})$ .

Hinweise : Es genügt das Potential in Abhängigkeit von  $z$  anzugeben. Als Modellproblem kann die Umströmung eines Kreisprofils verwendet werden (Vorlesung Folie 79-82).

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie  $\int_c (\bar{z})^2 dz$ ,  $c(t) = 2e^{it}$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$  auf die drei folgenden verschiedenen Arten:

a) Als Grenzwert der Riemannsummen  $\sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1})$  mit  $z_k := 2e^{i\frac{k\pi}{4n}}$  für  $n \rightarrow \infty$ .

b) Als komplexes Kurvenintegral  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(c(t)) \dot{c}(t) dt$ .

c) Durch Berechnung zweier reeller Kurvenintegrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Re} (f(c(t)) \dot{c}(t)) dt + i \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Im} (f(c(t)) \dot{c}(t)) dt.$$

**Aufgabe 3:**

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

a)  $\int_{C_1+C_2} |z| dz$ ,  $C_1$  : geradliniger Weg von -1 nach 1,  $C_2$  : Halbkreis mit Radius 1 um Null, von 1 nach -1 in mathematisch positiver Richtung.

b)  $\int_C (1+z) dz$ ,  $C := \cos t + 3i \sin t$ ,  $t \in [-\pi, 0]$  (Halbellipse).

c)  $\int_c (\bar{z})^2 dz$ ,  $c(t) = 2e^{(-1+i)t}$ ,  $t \in [0, \pi/4]$ .

d)  $\int_C z \sin z dz$ ,  $C(\varphi) = 2e^{i\pi\varphi}$ ,  $\varphi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

e)  $\int_C e^{3z} dz$ ,  $C$  : Das Stück der Parabel  $\text{Im}(z) = \pi(\text{Re}(z))^2$  welches die Punkte Null und  $1+i\pi$  verbindet.

**Aufgabe 4:**

- a) Sei  $C$  der mathematisch positiv orientierte Rand (d.h. die Randkurve wird so durchlaufen, dass das Gebiet links liegt) des Gebietes  $R := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ .

Berechnen Sie : i)  $\int_C \text{Im}(z) dz$ , ii)  $\int_C \frac{z^2}{z+4i} dz$ , und iii)  $\int_C \frac{6z-6}{2z^2-5z+2} dz$ .

- b) Bitte bewerten Sie folgende Aussagen.

- (i) Seien  $C(t) = 4e^{-it}$ ,  $t \in [-2\pi, 2\pi]$  und  $\tilde{C}$  der einmal positiv durchlaufene Kreis mit Radius 2 um Null. . Dann gilt

$\int_C \frac{3}{z-1} dz = 6\pi i$ .

$\int_C (z-1)^2 + \frac{3}{z-1} dz = -12\pi i$ .

$\int_C \frac{3}{z-1} dz = -2 \int_{\tilde{C}} \frac{3}{z-1} dz$ .

- (ii) Sei  $f(z) = \ln(z)$ . Dann gilt

$\int_{C_1} f(z) dz = -2i$  für  $C_1(t) = e^{it}$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

$\int_{C_2} f(z) dz = 2i$  für  $C_2(t) = e^{it}$ ,  $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .

$\int_{C_3} f(z) dz = -2i$  für  $C_3(t) = 4 - 4t^2 + it$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

**Abgabetermin: 31. Mai 2011.**