Aufgabe 1)

a) Sei i die imaginäre Einheit, $\ln(z)$ der Hauptwert des komplexen Logarithmus und D der Kreisringsektor

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = re^{i\phi},\, r \in [1, e^2),\, \phi \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \right\} .$$

Bestimmen Sie das Bild von D unter der Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad f(z) := \ln(z^2)$$

und fertigen Sie Skizzen von D und vom Bild $f(D)$ an.

b) Gegeben ist die Möbiustransformation

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T(z) := \frac{(1+i)z + i - 1}{z - i} .$$

Bestimmen Sie die Bilder

(i) der imaginären Achse,

(ii) der reellen Achse,

(iii) der Geraden $g := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\,(z) \;=\; 1 \}$,

(iv) der oberen Halbebene $H = \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\,(z) \;>\; 0 \}$

unter der Transformation T.

Aufgabe 2)

Gegeben sei $\qquad f(z) \;=\; \dfrac{3z^2 + 2iz + 1}{(9z^2+1)(z^2+1)}$.

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f.

c) Bestimmen Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f.

d) Berechnen Sie

$$\oint_C f(z)\,dz\,, \qquad C : [0, 4\pi] \to \mathbb{C},\; C(t) = 3i + 3\,e^{-it}.$$

e) Bestimmen Sie diejenige Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = \frac{1}{2}$ gegen $f(z)$ konvergiert.

Viel Erfolg!