Aufgabe 1)

a) Sei i die imaginäre Einheit, $\ln(z)$ der Hauptwert des komplexen Logarithmus und D der Kreisringsektor

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = re^{i\phi},\, r \in [1, e^2),\, \phi \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \right\}.$$

Bestimmen Sie das Bild von D unter der Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \ln(z^2)$$

und fertigen Sie Skizzen von D und vom Bild $f(D)$ an.

b) Gegeben ist die Möbiustransformation

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T(z) := \frac{(1+i)z + i - 1}{z - i}.$$

Bestimmen Sie die Bilder

(i) der imaginären Achse,

(ii) der reellen Achse,

(iii) der Geraden $g := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 1 \,\}$,

(iv) der oberen Halbebene $H = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\,(z) > 0 \,\}$

unter der Transformation T.

Lösung:

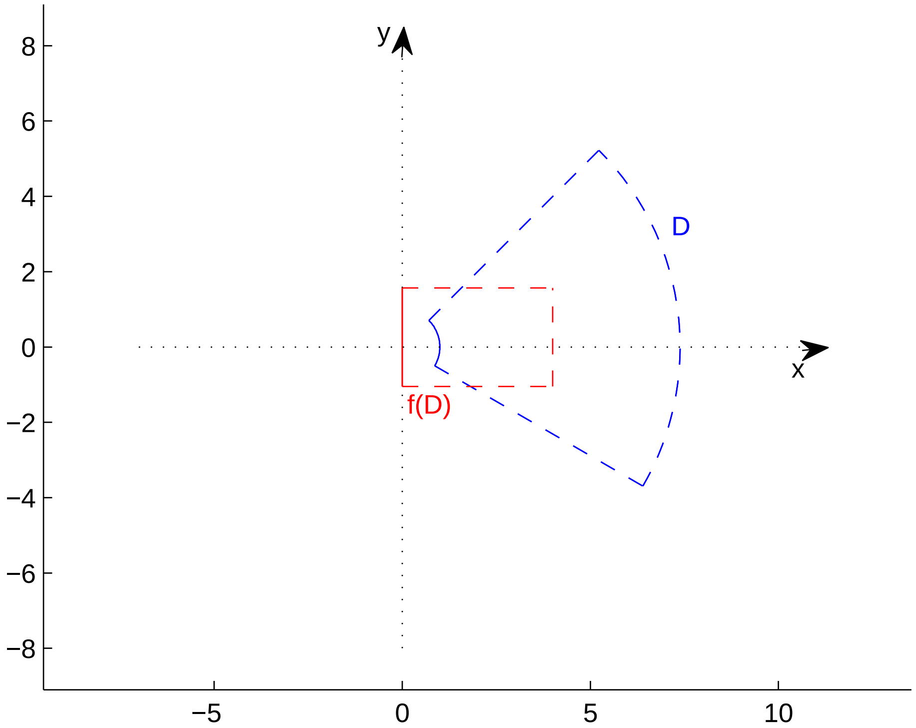
a) (3 Punkte) $D := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = re^{i\phi},\, r \in [1, e^2),\, \phi \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \right\}$.

$z^2 = \rho\, e^{i\alpha}, \qquad \rho \in [1, e^4),\, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\ln(z^2) = \ln(|z^2| + i \cdot \arg(z^2) = \ln(\rho) + i\alpha$

$\mathrm{Re}\, f(z) \in [0, 4), \qquad \mathrm{Im}\,(f(z)) \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

Skizze: D ist ein Kreisringsegment mit Innenradius 1 und Außenradius e^2 und Winkelzwischen $-\pi/6$ und $\pi/2$. Das Bild $f(D)$ ist das Rechteck $[0, 4) \times (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. Die linke Kante gehört zum Bild. Die anderen drei Seiten des Rechtecks dagegen nicht!



b) $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T(z) := \dfrac{(1+i)z + i - 1}{z - i}$.

(i) (2 Punkte) Wegen $i \in i\mathbb{R}$ ist das Bild der imaginären Achse eine Gerade.
$T(0) = \dfrac{i-1}{-i} = -1 - i$ und $T(\infty) = 1 + i \implies$
Das Bild der imaginären Achse ist die Gerade g_1 mit $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)$.

(ii) (2 Punkte) Bild von $\mathbb{R}$: echter Kreis K, symmetrisch zum Bild von $i\mathbb{R}$. Der Mittelpunkt M des Bildkreises liegt also auf g_1 .
Wegen
$T(0) = -1 - i$, und $T(\infty) = 1 + i$ ist $M = 0$ und der Radius $R = \sqrt{2}$.

(iii) (2 Punkte) Das Bild der Geraden $g = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\,(z) \,=\, 1 \,\}$,
Der Punkt i liegt auf g, also ist das Bild eine Gerade. Sie geht wegen $T(\infty) = 1+i$ durch $1+i$ und ist symmetrisch zu $T(i\mathbb{R}) = g_1$. Das Bild ist die Gerade senkrecht zu g_1 durch den Punkt $1 + i$.
Alternativ : $T(2) = i$: Also Bild Gerade durch 0 und i.

(iv) (1 Punkt) Das Bild der oberen Halbebene $H = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\,(z) > 0 \,\}$ wird begrenzt durch das Bild der reellen Achse K. Wegen $T(i) = \infty$ wird H auf das Äußere des Kreise K abgebildet.

Aufgabe 2)

Gegeben sei $$f(z) \;=\; \frac{3z^2+2iz+1}{(9z^2+1)(z^2+1)}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f.

c) Bestimmen Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f.

d) Berechnen Sie
$$\oint_C f(z)\,dz\,, \qquad C:\,[0,4\pi]\to\mathbb{C},\; C(t) = 3i+3\,e^{-it}.$$

e) Bestimmen Sie diejenige Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0=0$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = \frac{1}{2}$ gegen $f(z)$ konvergiert.

Lösung zur Aufgabe 2)

a) (3 Punkte) Nennernullstellen: $z_{1,3} = \mp\frac{i}{3}$, $z_{2,4} = \pm i$.
Zählernullstellen: $z^2+\frac{2}{3}iz+\frac{1}{3}=0 \iff z_3=\frac{i}{3}, z_4=-i$
$$f(z) \;=\; \frac{1}{3(z+\frac{i}{3})(z-i)} = \tilde f(z)\,, \qquad \forall z\neq z_3, z_4\,.$$
In z_3 und z_4 liegen hebbare Singularitäten vor, in z_1 und z_2 Pole erster Ordnung.

b) (3 Punkte) $\mathrm{Res}f(z_4) = \mathrm{Res}f(z_3) = 0$.
$z_1 = -i/3$ ist einfacher Pol :
$$Res f(z_1) \;=\; \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\tilde f(z) = \frac{1}{3(-\frac{i}{3}-i)} \;=\; \frac{1}{-4i} \;=\; \frac{i}{4}.$$
$z_2 = i$ ist einfacher Pol :
$$Res f(z_2) \;=\; \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\tilde f(z) = \frac{1}{3(i+\frac{i}{3})} \;=\; \frac{1}{4i} \;=\; -\frac{i}{4}.$$

c) PBZ: (1 Punkt) $$\tilde f(z) = \frac{\frac{i}{4}}{z+\frac{i}{3}} - \frac{\frac{i}{4}}{z-i}\,.$$

d) (1 Punkt)$C:\,[0,4\pi]\to\mathbb{C},\; C(t) = 3i+3\,e^{-it}$.
$$\oint_C f(z)\,dz \;=\; -2\cdot 2\pi i\cdot\mathrm{Res}f(i) = -\pi.$$

e) (2 Punkte) Laurentreihe für $\frac{1}{3}<|z|<1$:
$$\tilde f(z) = \frac{i}{4z}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{3z}} + \frac{i}{4i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{i}} = \frac{i}{4z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{3z}\right)^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^k$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{k+1}}{4\cdot i^k}3^{k+1}z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4i^k}z^k\,.$$