Aufgabe 1) 3+ 1 + 6 Punkte

a) Sei i die imaginäre Einheit,

$$R := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |z| < 3,\, \mathrm{Im}\,(z) > 0\} \,.$$

und

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad f(z) := \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \ln(z)$$

i) Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung f und fertigen Sie Skizzen von R und dem Bild von R unter f an.

ii) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $f(z) = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\quad T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(4i) \;=\; \infty\,, \qquad T(0) \;=\; -1\,, \qquad T(\infty) \;=\; 2\,.$$

c) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T aus Aufgabenteil b).

(i) $K_1 :=$ imaginäre Achse,

(ii) $K_2 := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \;=\; 4\,\}$,

(iii) $K_3 :=$ reelle Achse.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) $R := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |z| < 3,\, \mathrm{Im}\,(z) > 0\} \iff |z| \in]1,3[,\ 0 < \arg(z) < \pi$.**(1 Punkt)**

$w_1 = \ln(z) = \ln|z| + i\arg(z) \implies \mathrm{Re}\,(w_1) \in]0, \ln(3)[,\ \mathrm{Im}\,(w_1) \in]0,\pi[.$ **(1 Punkt)**

$w_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}w_1 \implies \mathrm{Im}\,(w_2) \in]0, \ln(3)/2[,\ \mathrm{Re}\,(w_1) \in]-\pi/2, 0[$

Skizzen: **(1 Punkt)**

Urbild ist obere Hälfte eines Kreisringes mit Innenradius 1 und Außenradius 3.

Bild: Rechteck $]-\pi/2, 0[\times]0, \ln(3)/2[$.

ii) $f(z) = \dfrac{\pi}{4} \iff \frac{i}{2}(\ln|z| + i\arg(z)) = \dfrac{\pi}{4}$

$\iff \ln|z| = 0 \wedge \frac{-1}{2}\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \iff z = -i\,.$ **(1 Punkt)**

b) Möbiustransformation mit

$$T(4i) \;=\; \infty \iff T(z) = \frac{az+b}{z-4i}, \qquad T(0) \;=\; -1 \iff T(z) = \frac{az+4i}{z-4i}$$

$$T(\infty) \;=\; 2 \iff T(z) = \frac{2z+4i}{z-4i}$$

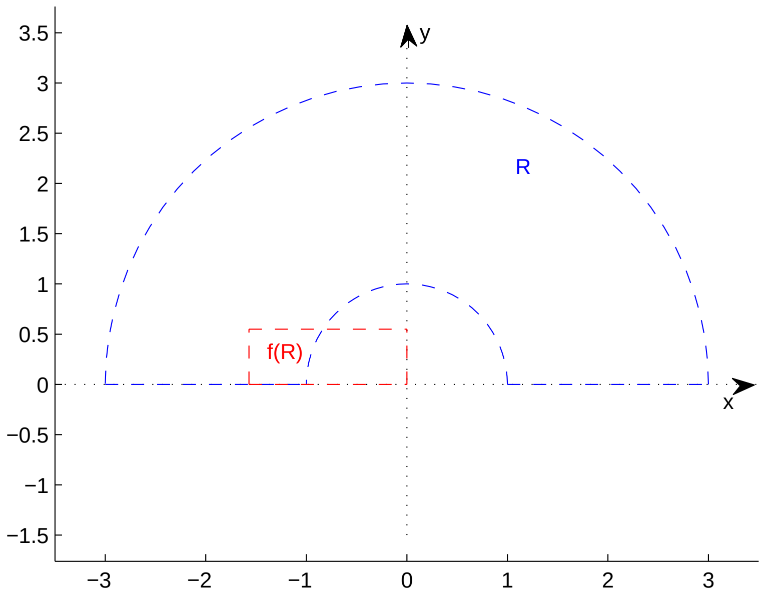

Abbildung 1: Skizze

c) (i) $K_1 := i\mathbb{R}$: wegen $4i \in K_1$ ist das Bild eine Gerade. Wegen $T(0) = -1$ und $T(\infty) = 2$ ist das Bild $g_1 =$ die reellee Achse. **(1 Punkt)**

(ii) $K_2 := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 4 \,\}$: wegen $4i \in K_2$ ist das Bild eine Gerade. Da K_2 symmetrisch zu $i\mathbb{R}$ ist, ist das Bild $g_2 = T(K_2)$ symmetrisch zu $\mathbb{R}$ also senkrecht auf $\mathbb{R}$.

Wegen $$T(-4i) = \frac{-8i + 4i}{-4i - 4i} = \frac{1}{2}$$

ist $$g_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2} \right\}.$$ **(2 Punkte)**

(iii) $K_3 :=$ reelle Achse: wegen $4i \notin K_3$ ist das Bild ein echter Kreis. Wegen der Symmetrie von K_3 zu K_1 und K_2 liegt der Mittelpunkt auf g_1 und g_2.

$\Longrightarrow M = \frac{1}{2}$. Wegen $T(0) = -1$ ist der Radius $R = \frac{3}{2}$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei $\quad f(z) \;=\; \dfrac{1}{z^2+2z+10}\,.$

(i) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie folgende Integrale

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz\,, \qquad C_1:\,[0,2\pi]\to\mathbb{C},\; C_1(t) \;=\; 4+e^{it},$$

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz\,, \qquad C_2:\,[0,2\pi]\to\mathbb{C},\; C_2(t) \;=\; -i+3\,e^{-it},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

b) Bestimmen Sie diejenige Laurent–Entwicklung von

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 4$ gegen $g(z)$ konvergiert.

Lösungsskizze zur Aufgabe 2)

a) $\quad f(z) \;=\; \dfrac{1}{z^2+2z+10}\,.$

(i) Residuen von f in isolierten Singularitäten:
Nennernullstellen:
$z^2+2z+10 = (z+1)^2+9 = 0 \iff z_{1,2} = -1\mp 3i$. **(1 Punkt)**

$$\mathrm{Res}f(z_1) = \mathrm{Res}f(-1-3i) = \frac{1}{-1-3i-(-1+3i)} = \frac{1}{-6i} = \frac{i}{6}\,.\ \textbf{(1 Punkt)}$$

$$\mathrm{Res}f(z_2) = \mathrm{Res}f(-1+3i) = \frac{1}{-1+3i-(-1-3i)} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}\,.\ \textbf{(1 Punkt)}$$

(ii) Berechnen Sie folgende Integrale
$C_1:\,[0,2\pi]\to\mathbb{C},\; C_1(t) \;=\; 4+e^{it},$

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz \;=\; 0 \qquad \text{(CIS).}\ \textbf{(1 Punkt)}$$

$C_2:\,[0,2\pi]\to\mathbb{C},\; C_2(t) \;=\; -i+3\,e^{-it},$

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz \;=\; -2\pi i\,\mathrm{Res}f(-1-3i) = -2\pi i\cdot\frac{i}{6} = \frac{\pi}{3}.\ \textbf{(1 Punkt)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; 2\pi i\,\mathrm{Res}f(-1+3i) = 2\pi i\cdot\frac{-i}{6} = \frac{\pi}{3}.\ \textbf{(1 Punkt)}$$

b) Die Laurent–Entwicklung von $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 4$ gegen $g(z)$ konvergiert, ist die Reihe für $|z-1| > 2$.

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-3} \qquad \text{Ansatz: } \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(z-1)-2} \qquad \text{richtiger Entwicklungspunkt: } \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{2}{z-1}} \text{richtiger Term ausklammern: } \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-1}\right)^k = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (z-1)^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (z-1)^{-k-2} = \sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{-k-2} (z-1)^k \text{.Ergebnis: } \textbf{(1 Punkt)}$$