Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Funktion

$$v(x,y) = 2xy - 6y + e^x \sin y.$$

(i) Man zeige, dass v harmonisch ist.

(ii) Zu $v(x,y)$ bestimme man eine Funktion $u(x,y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

b) (i) Für die Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4i| = 3\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+6i| = 3\}$ berechne man die Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

(ii) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(3i) = 0\,, \quad T(-5i) = \infty \quad \text{und} \quad T(-3i) = 2\,.$$

(iii) Man skizzere die Bildkreise $T(K_1)$ und $T(K_2)$ und ermittle ihre Radien.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{(z^2-9)\exp\left(\frac{1}{z+3}\right)}{z-3}$ definierte Funktion.

(i) Man bestimme alle Singularitäten von f.

(ii) Man berechne die ersten vier nicht verschwindenden Summanden der Laurent-Reihe um $z_0 = -3$, die für große z konvergiert und skizziere deren Konvergenzgebiet.

(iii) Für alle Singularitäten von f gebe man den Typ und die zugehörigen Residuen an.

(iv) Für die im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Kurve $c: \ |z| = 4$ berechne man $\displaystyle\oint_c f(z)\,dz$.

b) Man berechne folgendes Integral

$$\int_c \bar{z}^2\,dz \quad \text{mit} \quad c(t) = (1+i)(t-1)\,, \quad 0 \le t \le 2\,.$$

c) Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls folgendes Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx.$$