Aufgabe 1:

a) (i) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(0) = 0\,, \quad T(-2) = 4 \quad \text{und} \quad T(i-1) = 2 + 2i\,.$$

(ii) Man zeichne den Kreis $K:\ |z+1| = 1$ und die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = -2$, $z_3 = i - 1$, sowie $T(K)$ mit $T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

b) Man entscheide (mit Begründung), ob

(i) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 4i \cdot \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) + i$ holomorph ist,

(ii) $\mathrm{Re}(z^{10} + \sin^7 z)$ harmonisch ist.

c) Man berechne den Wert der folgenden Integrale in kartesischen Koordinaten (alle geschlossenen Kurven seien positiv orientiert):

(i) $\displaystyle\int_1^{2i} \frac{1}{z}\, dz\,,$

(ii) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4}\, dz\,,$

(iii) $\displaystyle\oint_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z^3}\, dz.$

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{4}{z-4}$ definierte Funktion.

(i) Man bestimme alle Singularitäten von f, gebe ihren Typ an und berechne die zugehörigen Residuen.

(ii) Für die im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Kurve $c:\ |z-2| = 3$ berechne man $\displaystyle\oint_c f(z)\, dz.$

(iii) Zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ gebe man alle Potenzreihenentwicklungen von f an und skizziere deren Konvergenzgebiet.

b) Unter Verwendung des Residuenkalküls berechne man $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\pi^2}.$