Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2013**
Prof. Dr. H. J. Oberle, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Es sei C der einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Einheitskreis $|z| = 1$.

(i) Berechnen Sie $$\int_C \frac{1}{(e^z - i)}\, dz\,.$$

(ii) Für eine auf $\mathbb{C}$ analytische Funktion gelte $|\,f(z)\,| = 4$ überall auf der Kurve C und $f(0) = 4i$. Wie muss dann f aussehen?

b) Sei C eine einfach geschlossene (Anfangspunkt = Endpunkt und außer im Anfangs– und Endpunkt gilt $C(t_1) = C(t_2) \Longrightarrow t_1 = t_2$) stückweise C^1 Kurve. Wann ist das Integral

$$I(C) := \int_C \frac{z}{z^2+1}\, dz$$

definiert?

Welche Werte kann das Integral annehmen, wenn es definiert ist?

Aufgabe 2:

a) Seien a, b, c komplexe Zahlen, $a \neq b$. Stellen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f\ :\ z \to \frac{c}{z-b}$$

mit Entwicklungspunkt a durch Verwendung der geometrischen Reihe auf und geben Sie deren Konvergenzradius an.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $\arctan(z)$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 1$.

Hinweis: Es gilt $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von f' und verwenden Sie Teil a).

c) In welchem Ring konvergiert die Laurent-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1} 2^{-k-1}\, z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{k+1}}\, z^k\ ?$$

Hinweis: Def. (6.11), Formeln (6.13) der Vorlesungsfolien.

Abgabetermine: 11. bzw. 14.06.13