Aufgabe 1)

Gegeben sei die Möbius-Transformation

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T(z) := \frac{10}{z+1}, \qquad \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

a) Bestimmen Sie die Bilder folgender Geraden unter der Abbildung T. Geben Sie dazu jeweils eine genaue Begründung an.

(i) $g_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$.

(ii) $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Re}\,(z) = 4\}$.

(iii) $g_3 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)\}$.

b) Auf welche Menge wird dann das Innere des Dreiecks mit den Ecken 0, 4, $4 + 4i$ abgebildet?

Fertigen Sie Skizzen der Urbild- und Bildebene an!

Aufgabe 2)

Gegeben sei die Abbildung

$$\widetilde{f}(z) = \frac{z^2+1}{(z+i)(z^2-7z+12)} \ .$$

a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von $\widetilde{f}$ und klassifizieren Sie diese.

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten von $\widetilde{f}$.

c) Bestimmen Sie die komplexe Partialbruchzerlegung der Abbildung

$$f(z) = \frac{z-i}{z^2-7z+12} \ .$$

d) Bestimmen Sie diejenige Laurent-Reihe von f mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = i$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = \pi$ gegen f konvergiert.

e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_c f(z)dz \quad , \qquad c(t) = \pi e^{2it} \ , \ t \in [0, 2\pi].$$