Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2014**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{5 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} - 1$ und $z_2 := -1 + i$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^{12}.

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w - z_2)^4 = -64$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |3z + 6 - i| = 9\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z)\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((1 - i)z) = 2\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : \pi \leq \arg(z) \leq 3\pi/2 , \ 4 \leq |z| \leq 5\}$.

Aufgabe 3:

a) Man untersuche die Folge

$$z_0 = 3\,, \quad z_{n+1} = \frac{3-2i}{4}\,(1+2i+z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

b) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist stetig in } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : D \to \mathbb{R} \text{ sind stetig in } z_0\,.$$

Aufgabe 4:

a) Man bestimme das Bild von

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z)\,,\ 0 \le \mathrm{Im}(z)\,,\ \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \le 1\}$$

unter der durch $f(z) = ((1+i)z)^2$ definierten Abbildung.

b) Gegeben seien $z_1 = 2 + \dfrac{\pi i}{3}$ und $z_2 = -1 + \dfrac{2\pi i}{3}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\,,\ \exp(z_2) \ \text{ und } \ \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\,.$$

Abgabetermin: 15.4. (zu Beginn der Übung)