

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9: (Klausur SoSe 12, WiSe 12/13)

a) Man entscheide (mit Begründung), ob

- (i) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 4i \cdot \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i$ holomorph ist,
- (ii) $g(z) = \operatorname{Re}(e^z)$ holomorph ist,
- (iii) $\operatorname{Re}(z^{10} + \sin^7 z)$ harmonisch ist.

b) Gegeben sei die Funktion

$$v(x, y) = 2xy - 6y + e^x \sin y.$$

- (i) Man zeige, dass v harmonisch ist.
- (ii) Zu $v(x, y)$ bestimme man eine Funktion $u(x, y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 10:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ jeweils für $0 < t < \pi$.

- a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z -Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.
- b) In welche Bildkurven der w -Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \ln z$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Aufgabe 11:

- a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it, t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2 , die symmetrisch zu G und K liegen.
- b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

- c) Man skizziere das Bild von G und K unter T , wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

Aufgabe 12:

Gegeben sei eine ebene, stationäre, wirbel- und quellenfreie Umströmung eines Zylinders mit dem Querschnitt $|z| \leq 4$ und der konstanten Geschwindigkeit $v_\infty = 5$ im Unendlichen.

- a) Man bilde den Bereich $|z| > 4$ der z -Ebene mit einer Joukowski-Funktion $w = f(z)$ konform in die Modellebene $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ab und berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$.
- b) Man berechne das Geschwindigkeitspotential u und das Geschwindigkeitsfeld für $|z| > 4$.
- c) Man bestimme die Stromfunktion für $|z| > 4$ und zeichne die Stromlinien für $z = x + iy$ und $x, y \in [-6, 6]$.

Abgabetermin: 13.5.-16.5 (zu Beginn der Übung)