Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2014**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\, ,\ t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene E ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq \sqrt{5}\}$.

Man berechne eine in E harmonische Funktion, die auf dem Rand von K den Wert 1 und auf G den Wert 0 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 11 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 14:

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^1 (2+3it)^2\, dt\,,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^2+1}{1+it}\, dt\,,$

c) $\displaystyle\int_{c_i} \mathrm{Im}(z)\, dz\,,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg, von $z_1 = 1$ nach $z_2 = i$. c_2 verbindet auch z_1 und z_2 , läuft jedoch auf dem Einheitskreis in mathematisch positivem Sinn.

d) Für den Einheitskreis $c(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ berechne man

(i) $\displaystyle\oint_c \bar{z} dz\,,$

(ii) $\displaystyle\oint_c z^2 dz\,.$

Aufgabe 15:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\int\limits_c z^3 + 4\, dz$ entlang des geradlinigen Weges von $1 - i$ nach $1 + i$,

b) $\int\limits_c z e^z\, dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \leq t \leq 0$,

c) $\int_{c_k} \frac{1}{z}\, dz$ für die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$,

d) $\int\limits_1^i \ln z\, dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{4 + \xi^2}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0 , ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{3}{z^2 + 2z + 5}$, $z_0 = i$ und $z_0 = 0$,

(ii) $f(z) = \dfrac{2}{e^z - 1}$, $z_0 = 2\pi(1 + i)$,

(iii) $f(z) = \dfrac{z}{\ln(3 - 2z)}$, $z_0 = 0$ und $z_0 = \dfrac{11}{8}$.

Abgabetermin: 27.5.- 30.5. (zu Beginn der Übung)