Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2014**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17: (Klausuren WS02 - WS12/13)

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4}\,dz\,,$ b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z+1}\,dz\,,$ c) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z+1}\,dz\,,$

d) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^2}\,dz\,,$ e) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2}\,dz\,,$ f) $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} \sin z + \frac{\ln z}{(z-2)^2}\,dz\,,$

g) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,dz\,,$ h) $\displaystyle\oint_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz\,,$ i) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cosh z}{(z-i\pi)^5}\,dz\,.$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die durch

$$f(z) = \frac{3-2z}{z^2-2z+1}$$

definierte Funktion f. Berechnet werden soll die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (*)$$

mit Konvergenzradius r. Dazu berechne man die Koeffizienten a_n auf verschiedene Weise (Partialbruchzerlegung von f ist hilfreich bei a) und b)):

a) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

b) Unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe.

c) Über eine Rekursionsformel, die entsteht, wenn man nach Multiplikation von $(*)$ mit dem Nenner von f einen Koeffizientenvergleich durchführt (Cauchy-Produkt).

Man bestätige, dass die in a) - c) ermittelten Koeffizienten identisch sind, ggf. durch einen Induktionsbeweis.

Aufgabe 19:

Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = i, \qquad \text{b)} \quad z_0 = -3$$

an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Aufgabe 20:

Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f(z) &= \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 0\,, \\
\text{b)} \quad f(z) &= z \sin\left(\frac{1}{z+\pi}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = -\pi\,, \\
\text{c)} \quad f(z) &= \frac{\cos z}{z^5} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 0\,.
\end{aligned}$$

Abgabetermin: 17.6.-20.6 (zu Beginn der Übung)