

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 4 : Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) In welchem Gebiet ist die Möbiustransformation $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ winkeltreu?
b) Ist es möglich das Gebiet

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

mittels einer Möbiustransformation auf das Innere eines echten Dreiecks abzubilden? Unter einem echten Dreieck verstehen wir ein Dreieck dessen Eckpunkte im Endlichen liegen.

- c) Die Abbildungsvorschrift $f : z \rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}} \bar{z}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Offensichtlich verursacht diese keine Längenverzerrungen. Die Größe der Winkel wird ebenfalls erhalten. f ist als Transformation $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wo ist f komplex differenzierbar? Wie verträgt sich Ihr Ergebnis mit dem Satz aus Folie 99 der Vorlesung?
d) Das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}, 0 < r < 2\}$

soll bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises transformiert werden. Warum tut es $z \mapsto \left(\frac{z}{2}\right)^8$ nicht?

Freiwillige Zusatzaufgabe: Geben Sie eine bijektive, konforme Abbildung an, die das Gewünschte leistet.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Kreisscheiben K_1 und K_2 mit Radius 1 um die Mittelpunkte i bzw. $-i$. Die Kreisscheibe K_1 möge ein elektrostatisches Potential von 0 und die Kreisscheibe K_2 ein elektrostatisches Potential von 1 haben. Im Punkt 0 seien die Kreisscheiben gegeneinander isoliert.

Zur Bestimmung des induzierten elektrostatischen Potentials und der Feldstärke soll das Gebiet außerhalb der Kreisscheiben bijektiv und konform auf einen Ring (Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen) oder einen Streifen (Gebiet zwischen zwei parallelen Geraden) abgebildet werden.

Welche der beiden Transformationen (Ring bzw. Streifen) ist möglich?

Geben Sie eine Transformation an, die das Gewünschte leistet.

Bestimmen Sie das induzierte elektrostatische Potential und die Feldstärke außerhalb der Kreisscheiben.

Hinweis: Konstruieren Sie ein Transformation T für die $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $T(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$ gilt. Bei geschickter Konstruktion bleiben die Symmetrien erhalten.

Abgabe bis: 19.6.15