Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Iske

SoSe 2015

Klausur Komplexe Funktionen

27. August 2015

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang: AIW | CI | ET | GES | IIW | MB | MTB | SB |

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: (5 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,, f(z) := \bar{z}^2 + \frac{1}{\bar{z}^2}\,.$$

In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar?

Tipp: Polarkoordinaten!

Lösung zu 1:

$$\begin{aligned} f(z) &= \bar{z}^2 + \frac{1}{\bar{z}^2} = r^2 e^{-2i\phi} + \frac{1}{r^2 e^{-2i\phi}} = r^2 e^{-2i\phi} + \frac{1}{r^2} e^{2i\phi} \\ &= r^2(\cos(-2\phi) + i\sin(-2\phi)) + \frac{1}{r^2}(\cos(2\phi) + i\sin(2\phi)) \\ &= \underbrace{\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) \cdot \cos(2\phi)}_{u(r,\phi)} + i \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{r^2} - r^2\right) \cdot \sin(2\phi)}_{v(r,\phi)} \quad \textbf{(2 Punkte)} \end{aligned}$$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

$u_r = \left(2r - \frac{2}{r^3}\right) \cdot \cos(2\phi) \overset{!}{=} \frac{1}{r} v_\phi = \left(\frac{1}{r^3} - r\right) \cdot 2\cos(2\phi)$

$(\frac{1}{r^3} - r = 0 \Longrightarrow r = 1)$ oder $(\cos(2\phi) = 0)$.

$v_r = \left(-2r - \frac{2}{r^3}\right) \cdot \sin(2\phi) \overset{!}{=} -\frac{1}{r} u_\phi = \left(-r - \frac{1}{r^3}\right) \cdot (-2\sin(2\phi))$

$\frac{1}{r^3} + r = 0 \longrightarrow$ keine Lösung! Oder $\sin(2\phi) = 0$.

Insgesamt also: $\sin(2\phi) = 0 \Longrightarrow \phi = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $r = 1$. **(2 Punkte)**

Die Funktion ist nur in den Punkten $z = \pm 1$ und $z = \pm i$ komplex differenzierbar.
(1 Punkt)

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Sei $\Gamma := \{z(t) = 3e^{it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\}$ der in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Rand des Kreises mit Radius 3 um Null.

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{2\pi z}}{(z-2i)^3}\, dz$.

b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{(z+i)(z-2i)}\, dz$.

c) $\displaystyle\int_\Gamma \bar{z}\, dz$.

Lösung zu 2:

a) Nach der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen ist

$$\int_\Gamma \frac{e^{2\pi z}}{(z-2i)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}\left[(e^{2\pi z})''\right]_{z=2i} = \pi i \cdot (2\pi)^2\, e^{2\pi \cdot 2i} = i4\pi^3. \text{ \textbf{(2 Punkte)}}$$

b) Nach dem Residuensatz gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{z}{(z+i)(z-2i)}\, dz &= 2\pi i\left(\left[\frac{z}{z+i}\right]_{z=2i} + \left[\frac{z}{z-2i}\right]_{z=-i}\right)\\ &= 2\pi i\left(\frac{2i}{3i} + \frac{-i}{-3i}\right) = 2\pi i\,. \text{ \textbf{(2 Punkte)}}\end{aligned}$$

c)

$$\int_\Gamma \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} 3e^{-it} \cdot 3ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} 9i\, dt = 18i\pi. \text{ \textbf{(1 Punkt)}}$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Gegeben ist $$f(z) = \frac{1}{z^2 - 8z + 25}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f .

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der Funktion f .

c) Bestimmen Sie diejenige Laurent-Entwicklung der Funktion f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 4 - 3i$, die in der Umgebung des Punktes $z^* = 5i$ gegen $f(z)$ konvergiert.

d) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $$\int_\Gamma f(z)\,dz, \qquad \Gamma := \{z(t) = 4 + 2\,e^{it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\},$$

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 8x + 25}\,dx\,.$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 3) $$f(z) = \frac{1}{z^2 - 8z + 25}\,.$$

a) Nennernullstellen: $(z-4)^2 + 9 = 0 \Longleftrightarrow z_{1,2} = 4 \pm 3i$.

$$f(z) = \frac{1}{(z - (4+3i))(z - (4-3i))}\,.$$

In $z_{1,2}$ liegen einfache Pole vor. [**2 Punkte**]

b) Residuen [**2 Punkte**]

$$Res\, f(4+3i) = \left[\frac{1}{z - (4-3i)}\right]_{z=4+3i} = \frac{1}{4+3i-(4-3i)} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}\,.$$

$$Res\, f(4-3i) = \left[\frac{1}{z - (4+3i)}\right]_{z=4-3i} = \frac{1}{4-3i-(4+3i)} = \frac{1}{-6i} = \frac{i}{6}\,.$$

c) Wir suchen die Laurent-Reihe für $|z-z_0| > 6$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 4-3i$ denn

$$|4+3i-z_0| = |4+3i-4+3i| = 6 < |5i-z_0| = |5i-4+3i)| = \sqrt{8^2+4^2}.\textbf{[1 Punkt]}$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-(4+3i))(z-(4-3i))} = \frac{1}{z-(4-3i)} \cdot \frac{1}{z-4-3i} \\
&= \frac{1}{z-(4-3i)} \cdot \left(\frac{1}{z-(4-3i)+4-3i-4-3i}\right) \\
&= \frac{1}{z-(4-3i)} \cdot \left(\frac{1}{z-(4-3i)-6i}\right) \\
&= \frac{1}{(z-(4-3i))^2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{6i}{z-(4-3i)}}\right) = \frac{1}{(z-(4-3i))^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{6i}{z-(4-3i)}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (6i)^k \; (z-(4-3i))^{-k-2} = \sum_{k=-\infty}^{-2} (6i)^{-k-2} \; (z-(4-3i))^k \; . \; \textbf{[3 Punkte]}
\end{aligned}$$

d) Integrale

(i) $\Gamma := \{ z(t) = 4 + 2\, e^{it} \,|\, t \in [0, 2\pi] \}$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0 \qquad \text{(CIS)} \; \textbf{[1 Punkt]}$$

(ii) $c = \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+10}\, dx = 2\pi i \, Res\, f(4+3i) = 2\pi i \, \frac{-i}{6} = \frac{\pi}{3}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$