Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2017**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3 (Hausaufgaben)

Aufgabe 1: Es sei $z = re^{i\phi}$ und $f(z) = u(r,\phi) + iv(r,\phi)$. Dann lauten die Cauchy - Riemannschen-Differentialgleichungen

$$\boxed{u_r = \frac{1}{r} v_\phi \,, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\phi}$$

(Nachweis: Kettenregel).

a) Sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl. Weiterhin sei die Funktion g gegeben durch:

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,,\ g(z) := |z|^2 + \frac{a^2}{|z|^2}\,.$$

In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ ist g komplex differenzierbar?
Tipp: Polarkoordinaten!

b) Welche der folgenden Funktionen sind im Punkt $z^* = \pi$ komplex differenzierbar? Welche der in $z^* = \pi$ differenzierbaren Funktionen ist in einer ganzen Umgebung des Punktes $z^* = \pi$ differenzierbar?

(i) $f(z) := \cos(\mathrm{Re}\,(z))\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$
(ii) $g(z) := \bar{z}^3\,, \quad \arg(z) \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}],\ |z| > 0$. **Tipp: Polarkoordinaten!**

Aufgabe 2)

Gegeben sei der Streifen S

$$S := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \mathrm{Im}\,(z) < 2\}\,.$$

Zeigen Sie, dass das Bild B_k, $k = 1, 2$ von S unter der Abbildung f_k

$$f_1(z) := \exp\left[\frac{\ln(3)}{2} \cdot (-iz)\right] + 1 + i\,,$$

$$f_2(z) := e^{i\mathrm{Re}\,(z)} \cdot (1 + \mathrm{Im}\,(z)) + 1 + i\,,$$

jeweils der Kreisring $R := \{\, w \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |\, w - (1+i)\,| < 3\}$ ist.
Prüfen Sie ob die Funktionen $f_k : S \longrightarrow R$ komplex differenzierbar und/oder bijektiv sind.

Abgabetermine: 15.05.17 - 19.05.17 bzw. 29.05.17 - 02.06.17