Fachbereich Mathematik **SoSe 2017**

Prof. Dr. M. Hinze

Klausur Komplexe Funktionen

31. August 2017

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1) Es sei i die imaginäre Einheit und für $z \in \mathbb{C}$ wie üblich $x = \mathrm{Re}\,(z)$, $y = \mathrm{Im}\,(z)$.

a) Gegeben sei die Menge $R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{e^1}{2}, \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}$,
sowie die Abbildung

$$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \ln\,(2\,z\,),$$

wobei ln den Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichne.

(i) Skizzieren Sie die Menge R in der komplexen Ebene.

(ii) Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung f.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad g : z = x+iy \mapsto g(z) = e^x \cdot [\,x\,\cos(y) - y\sin(y) + i \cdot y\,\cos(y) + i \cdot x\sin(y)\,]$$

auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

c) f sei eine auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion mit

$$f(z) = f(x+iy) = x + 2y + x^3 - 3xy^2 + i \cdot v(x,y), \qquad \text{mit } v(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Wie muss dann $v(x,y)$ aussehen?

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) **[4 Punkte]**

(i) Skizze: R ist die obere Hälfte des Ringes um Null mit Innenradius $\frac{1}{2}$ und Außenradius $\frac{e}{2}$. **[1 Punkt]**

(ii) $f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \ln\,(2\,z\,)$.
Sei $\tilde{w} = 2z$ dann gilt $1 \leq |\tilde{w}| \leq e^1$ und $0 \leq \arg\,(\tilde{w}) \leq \pi$. **[1 Punkt]**
Für $\hat{w} = \ln(\tilde{w}) = \ln|\tilde{w}| + i\arg\,(\tilde{w})$ gilt dann
$\mathrm{Re}\,(\hat{w}) \in [\ln(1), \ln(e)] = [0,1]$, $\quad \mathrm{Im}\,(\hat{w}) \in [0,\pi]$. **[1 Punkt]**
Schließlich berechnen wir
$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \hat{w}$ und erhalten ein achsenparalleles Rechteck mit
$\mathrm{Re}\,(f(z)) \in [-\pi, 0]$, $\quad \mathrm{Im}\,(f(z)) \in [0,1]$. **[1 Punkt]**

b) Ansatz **[1 Punkt]**

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad g : z = x+iy \mapsto g(z) = e^x \cdot [\,x\,\cos(y) - y\sin(y) + i \cdot y\,\cos(y) + i \cdot x\sin(y)\,]$$

Wir überprüfen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$u_x = (e^x \cdot [\,x\,\cos(y) - y\sin(y)])_x = e^x \cdot [\,x\,\cos(y) - y\sin(y) + \cos(y)]$

$v_y = (e^x \cdot [y\,\cos(y) + x\sin(y)\,])_y = e^x \cdot [\cos(y) - y\sin(y)) + x\cos(y)\,]$

Die erste Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung $u_x = v_y$ ist also erfüllt.
[1 Punkt]

$$u_y = (e^x \cdot [\,x\,\cos(y)\,-\,y\sin(y)])_y = e^x \cdot [\,-x\,\sin(y)\,-\,y\cos(y))-\,\sin(y)]$$
$$v_x = \,(e^x \cdot [y\,\cos(y)\,+\,x\sin(y)\,])_x = e^x \cdot [y\,\cos(y)\,+\,x\sin(y)\,+\,\sin(y)\,]$$

Auch die zweite Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung $u_y = -v_x$ ist erfüllt. Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. **[1 Punkt]**

c) **[3 Punkte]**

Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit

$$f(z) = \,f(x+iy)\,=\,x + 2y + x^3 - 3xy^2\,+\,i \cdot v(x,y), \qquad \text{mit}\;\; v(x,y)\,\in \mathbb{R}$$

so liefert die erste Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung

$$v_y = u_x = \,1 + 3x^2 - 3y^2 \implies v(x,y) = y + 3x^2y - y^3 + k(x) \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Mit diesem v muss gelten

$$-v_x = -6xy - k'(x) \overset{!}{=} \,u_y = 2 - 6xy \qquad\qquad \textbf{[1 Punkt]}$$
also $\qquad k(x) = -2x + k,\;\; k \in \mathbb{R}$

und damit $\qquad v(x,y) = \,y - 2x + 3x^2y - y^3 + k \quad$ **[1 Punkt]**

Aufgabe 2)

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2017}{x^2+9}\,dx\,.$

b) Gegeben sei $\displaystyle f(z) \;=\; \frac{1}{(z-5)(z-3)^2}\,.$

(i) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz\,,\qquad \Gamma:\,[0,2\pi]\to\mathbb{C},\, \Gamma(t) = 3 + e^{it}.$

(iii) Bestimmen Sie diejenige Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 3$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 2i$ gegen $f(2i)$ konvergiert.

Lösungsskizze zur Aufgabe 2)

a) Der Integrand $g(z) := \dfrac{2017}{x^2+9}$ hat die isolierten Singularitäten $\pm 3i$. Nur $z_0 = 3i$ liegt in der oberen Halbebene.

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2017}{x^2+9}\,dx \;=\; 2\pi i\, Res(g(z),3i) \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{2017}{z^2+9} \;=\; 2\pi i \lim_{z\to 3i}\frac{2017}{z+3i} \;=\; \frac{2017\cdot\pi}{3}\,. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

b) (i) f hat isolierte Singularitäten in 3 und 5.

$f(z) \;=\; \dfrac{\frac{1}{z-5}}{(z-3)^2}$ hat einen Pol zweiter Ordnung in $z_0 = 3$

$$Res(f(z);3) \;=\; \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 3}\left((z-3)^2 f(z)\right)^{(2-1)} \;=\; \lim_{z\to 3}\frac{-1}{(z-5)^2} \;=\; -\frac{1}{4}$$

[2 Punkte]

$f(z) \;=\; \dfrac{\frac{1}{(z-3)^2}}{(z-5)}$ hat einen einfachen Pol in $z_1 = 5$

$$Res(f(z);5) \;=\; \lim_{z\to 5}(z-5)\,f(z) \;=\; \lim_{z\to 5}\frac{1}{(z-3)^2} \;=\; \frac{1}{4} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(ii) $$\oint_\Gamma f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\, Res(f(z);3) \;=\; -\frac{\pi i}{2}\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

(iii) Diejenige Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 3$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 2i$ gegen $f(2i)$ konvergiert, konvergiert im Ring $|z-3| > |5-3| = 2$. **[1 Punkt]**. Man erhält:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-5} &= \frac{1}{(z-3)+3-5} = \frac{1}{(z-3)-2} \\ &= \frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z-3}} = \frac{1}{z-3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(z-3)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\,(z-3)^{-k-1} \quad \textbf{[2 Punkte]}\end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}\cdot\frac{1}{z-5} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\,(z-3)^{-k-3} = \sum_{k=-\infty}^{-3} 2^{-k-3}\,(z-3)^k. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 3) [4 Punkte]

f sei eine auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion mit

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\cdot v(x,y), \qquad \text{mit } u(x,y),\, v(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass u und v harmonische Funktionen sind.

Lösugsskizze zur Aufgabe 3)

Da f komplex differenzierbar ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung

$$u_x = v_y, \quad -u_y = v_x \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Außerdem ist jede komplex differenzierbare Funktion beliebig oft stetig differenzierbar.

Damit folgt

$$\Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Ansatz: [1 Punkt]

Die letzte Gleichung folgt aus dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz. Dieser ist anwendbar da jede komplex differenzierbare Funktion insbesondere auch zwei Mal stetig differenzierbar ist. **[1 Punkt]**

Völlig analog erhält man:

$$\Delta v(x,y) = v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy} = 0. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$