

Komplexe Funktionen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg



Sommersemester 2017

Beachtenswertes

- Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- Übungsaufgaben → <http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html>
- Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!
- Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Veters, 3. Auflage, Teubner 2001.

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>

Kapitel 1.7: Wdh Komplexe Zahlen

Ausgangspunkt: Wir wollen **alle** Gleichungen der Form

$$x^2 = a \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

lösen können.

Gute Nachricht:

Für nichtnegative $a \in [0, \infty)$ gibt es stets (mindestens) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Schlechte Nachricht: Für negative $a \in (-\infty, 0)$ gibt es **kein** $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Beispiel: Für $a = -1$ gibt es keine reelle Zahl x mit

$$x^2 + 1 = 0.$$

Was nun? Um alle Gleichungen der Form $x^2 = a$ lösen zu können, müssen wir den Zahlbereich der reellen Zahlen erweitern. Diese **Zahlbereichserweiterung** führt uns zum **Körper der komplexen Zahlen**, \mathbb{C} .

Im folgenden wird die (algebraische und geometrische) Struktur von \mathbb{C} diskutiert.

Kapitel 1.7: Wdh Komplexe Zahlen

Einführung der komplexen Zahlen.

Startpunkt: Verwende *symbolische Lösung* i für Gleichung $x^2 + 1 = 0$, so dass

$$i^2 = -1.$$

Die Zahl i heißt *imaginäre Einheit*.

Nächster Schritt: Mit der imaginären Einheit bildet man nun die Zahlenmenge

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dann führt man die folgenden Rechenoperationen auf \mathbb{C} ein.

- **Addition:**

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Multiplikation:**

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit besitzt \mathbb{C} eine algebraische Struktur.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Zur Konstruktion der komplexen Zahlen.

Ausgangspunkt: Betrachte die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit **Addition**

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

und **Multiplikation**

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Beobachtung: Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ; weiterhin gilt

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \quad \text{für } (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

d.h. $(1, 0) \in \mathbb{C}$ ist **neutrales Element der Multiplikation**. Die Gleichung

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \quad \text{für } (a, b) \neq (0, 0)$$

besitzt die eindeutige Lösung, das **multiplikative Inverse** zu (a, b) ,

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Zur Struktur der komplexen Zahlen.

Bemerkung: Die Menge \mathbb{R}^2 bildet mit der Addition und Multiplikation einen Körper, den **Körper der komplexen Zahlen**, ab sofort bezeichnet mit \mathbb{C} .

Beobachtung: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\varphi(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{0})$ ist injektiv. Für alle $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{0}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{0}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{a}_1) + \varphi(\mathbf{a}_2) \\ \varphi(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) &= (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2, \mathbf{0}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{0}) \cdot (\mathbf{a}_2, \mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{a}_1) \cdot \varphi(\mathbf{a}_2)\end{aligned}$$

Fazit:

- Können die reellen Zahlen mit komplexen Zahlen der Form $(\mathbf{a}, \mathbf{0})$ identifizieren;
- Die reellen Zahlen bilden einen **Unterkörper** von \mathbb{C} ;
- Die Rechenregeln in \mathbb{C} sind konsistent mit den Rechenregeln in \mathbb{R} .

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Der Körper der reellen Zahlen ist angeordnet.

Bemerkung: Die reellen Zahlen bilden einen **angordneten Körper**; es gelten die folgenden **Anordnungsaxiome**.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $x + y > 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $xy > 0$.

Frage: Ist der Körper der komplexen Zahlen, \mathbb{C} , angeordnet?

Antwort: NEIN!

Denn in einem angeordneten Körper sind von Null verschiedene Quadratzahlen positiv. Wäre \mathbb{C} angeordnet, so folgt aus

$$0 < 1^2 = 1 \quad \text{und} \quad 0 < i^2 = -1$$

der Widerspruch $0 < 1 + (-1) = 0$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Vereinfachung der Notationen:

- Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir a statt $(a,0)$;
- Die komplexe Einheit $(0,1)$ notieren wir mit i ;
- Damit lässt sich jede komplexe Zahl (a, b) schreiben als

$$(a, b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + b \cdot i = a + ib.$$

und es gilt

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Fazit: Wir haben mit \mathbb{C} einen Körper konstruiert, der \mathbb{R} umfasst. Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

ist in \mathbb{C} lösbar. Die einzigen beiden Lösungen lauten $\pm i$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Realteil und Imaginärteil.

Ab sofort bezeichnen wir komplexe Zahlen mit z oder w . Für

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

heißt x der **Realteil** und y der **Imaginärteil** von z , kurz

$$x = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z + w) &= \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Im}(z + w) &= \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Re}(az) &= a\operatorname{Re}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R} \\ \operatorname{Im}(az) &= a\operatorname{Im}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und weiterhin

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } z \neq 0.$$

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

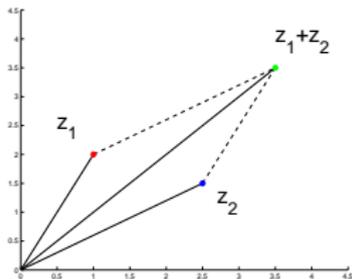
Die komplexe Zahlenebene.

Geometrische Veranschaulichung: Wir stellen $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ als **Punkt** in der komplexen Zahlenebene (**Gaußsche Zahlenebene**)

dar, gegeben durch das kartesische Koordinatensystem des \mathbb{R}^2 , mit einer **reellen Achse**, \mathbb{R} , und einer **imaginären Achse**, $i \cdot \mathbb{R}$.

Geometrische Veranschaulichung der Addition:

Durch übliche Addition der Ortsvektoren nach der Parallelogrammregel.



Addition zweier komplexer Zahlen.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Konjugation komplexer Zahlen.

Ordne durch Spiegelung an reeller Achse jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ mit

$$\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

konjugierte komplexe Zahl zu.

Es gelten die folgenden Rechenregeln.

$$\begin{aligned}\overline{w + z} &= \bar{w} + \bar{z} && \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\ \overline{wz} &= \bar{w} \cdot \bar{z} && \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\ \overline{(\bar{z})} &= z && \text{für } z \in \mathbb{C} \\ z\bar{z} &= x^2 + y^2 && \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Re}(z) &= (z + \bar{z})/2 && \text{für } z \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Im}(z) &= (z - \bar{z})/(2i) && \text{für } z \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $z = \bar{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Der Betrag.

Setze

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

für den **Betrag** von z sowie $|w - z|$ für den **Abstand** zweier Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene.

- Somit stellt $|z| = |z - 0|$ den euklidischen Abstand von z zum Ursprung dar.
- Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt $|z|$ mit dem (üblichen) Betrag für reelle Zahlen überein.
- Es gelten die folgenden Abschätzungen.

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{und} \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z| \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Wir haben (vergleiche Definition von Normen)

- $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ (**Dreiecksungleichung**);
- $|wz| = |w| \cdot |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Die Eulersche Formel.

In der komplexen Zahlenebene gilt für

$$z = x + iy$$

mit den Polarkoordinaten

$$(x, y) = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

die Eulersche Formel

$$z = |z| \exp(i\varphi) = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$ für $z \neq 0$ den (eindeutigen) Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 durch $z = (x, y)$ darstellt.

Der Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ wird ebenso als Argument von $z \neq 0$ bezeichnet, kurz

$$\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi).$$

Beispiel: $i = (0, 1) = \exp(i\pi/2)$, $-1 = i^2 = \exp(i\pi)$, somit gilt $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Zur Geometrie der Multiplikation und Division.

Mit der Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ als **Drehstreckung** in der komplexen Zahlenebene interpretieren, denn für

$$w = |w|(\cos(\psi), \sin(\psi)) \quad \text{und} \quad z = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

gilt

$$\begin{aligned} wz &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi) + i \sin(\psi))(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \\ &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + i \sin(\psi + \varphi)) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)) \end{aligned}$$

bzw. mit der Eulerschen Formel

$$wz = |w| \cdot |z| \exp(i\psi) \cdot \exp(i\varphi) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)).$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt analog

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \exp(i(\psi - \varphi)) = \frac{|w|}{|z|} (\cos(\psi - \varphi) + i \sin(\psi - \varphi)).$$

Kapitel 1: Wdh Komplexe Zahlen

Potenzen und Einheitswurzeln.

Für die **n -te Potenz z^n** , $n \in \mathbb{N}$, von $z \in \mathbb{C}$ gilt die Darstellung

$$z^n = (|z| \exp(i\varphi))^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Die Gleichung

$$z^n = 1$$

besitzt die n paarweise verschiedenen Lösungen

$$z_k = \exp\left(i \frac{2\pi k}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1.$$

Diese Lösungen werden als **n -te Einheitswurzeln** bezeichnet.

Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen

Eine Abbildung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C},$$

welche einer komplexen Zahl $z = x + iy \in D$ eine komplexe Zahl $f(z) = u(z) + iv(z)$ zugeordnet, heißt komplexe Funktion. Dabei gilt $u(z) = \operatorname{Re}f(z)$ und $v(z) = \operatorname{Im}f(z)$. Dies sind dann reellwertige Funktionen.

Komplexe Funktionen f können auch als Abbildungen von $D \subset \mathbb{R}^2$ in den \mathbb{R}^2 gemäß

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

aufgefasst werden.

Somit kann man Stetigkeit oder Grenzwert einer komplexen Funktion über die Stetigkeit oder den Grenzwert der entsprechenden Abbildung aus $D \subset \mathbb{R}^2$ in den \mathbb{R}^2 erklären.

Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Bspe

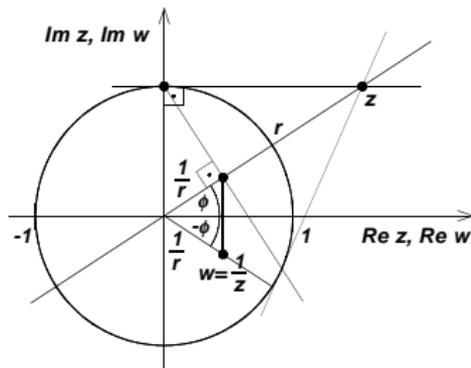
1) $f(z) = \frac{1}{z}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Hier $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ und $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

Geometrisch in der Gauss'schen Zahlenebene:

$$z = r e^{i\phi} \quad f(z) = \rho e^{i\psi} = \frac{1}{r} e^{-i\phi} = \frac{1}{z},$$



Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Bspe

2) $f(z) = z^3$ mit Definitionsbereich \mathbb{C} :

$$f(z) = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

3) $f(z) = e^z$ mit Definitionsbereich \mathbb{C} :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y .$$

Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Potenzreihen

Erinnerung:

$$(z_n) = (x_n + iy_n) \rightarrow z = x + iy \text{ in } \mathbb{C} \iff (x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

Dies erlaubt Übertragung von Potenzreihen ins Komplexe (vergl. Kapitel 3.6): Wir betrachten die Folge der Partialsummen

$$(s_n) = \left(\sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k \right)$$

bei gegebenen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ sowie gegebenem $z_0 \in \mathbb{C}$.

Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert (s_n) ?

Falls für $z = z_1$ Konvergenz der Folge (s_n) gegen $s' \in \mathbb{C}$ vorliegt, sagen wir, die Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

konvergiert für $z = z_1$ gegen s' . Die Reihe ist dann auch für alle z mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ konvergent, sogar absolut (Satz von Abel).

Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Potenzreihen

Folgende Fälle können auftreten:

- a) $p(z)$ konvergiert nirgends (außer für $z = z_0$);
- b) $p(z)$ konvergiert beständig, d.h. in der gesamten komplexen Ebene \mathbb{C} ;
- c) Es gibt eine reelle Zahl R mit $0 < R < \infty$, so dass $p(z)$ für alle z mit $|z - z_0| < R$ konvergiert, und für alle z mit $|z - z_0| > R$ divergiert. R heißt **Konvergenzradius** der Reihe und kann stets durch

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

bestimmt werden. Die Reihe ist beständig konvergent, wenn $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, d.h. $R = \infty$, ist. Die Reihe konvergiert nirgends, wenn die Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$ unbeschränkt ist, also $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$, $R = 0$, ist.

- d) $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ existent, dann $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$.

Buch Kap. 10.1 – Komplexe Funktionen, Potenzreihen

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} : \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty.$$

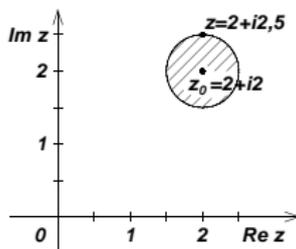
$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1} (z - (2+2i))^k :$$

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(2i)^k}{k+1} \right|}{\left| \frac{(2i)^{k+1}}{k+2} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|2i|} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{2}.$$

Für den Randpunkt $z = 2 + 2,5i$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1} (0,5i)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} i^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} (-1)^k,$$

also konvergente alternierende Reihe (Leibniz-Kriterium).



Buch Kap. 10.3 – Elementare Funktionen

Elementare Funktionen über Potenzreihen definieren:

Exponentialfunktion: $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Sinus: $\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$

Kosinus: $\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$

Hyperbelfunktionen:

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$