Die allgemeine Potenz

Definition: Für $a, b \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\{a^b\}$ die Menge der komplexen Zahlen

$$e^{b \operatorname{Log}(a)} \qquad \text{für } a \neq 0$$

wobei $\operatorname{Log}(a)$ alle Werte von $\{\ln(|a|) + i \arg(a)\}$ durchläuft. Somit gilt

$$\{a^b\} = \left\{ e^{b \ln(|a|) + i\alpha + 2\pi i k} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

wobei $\alpha = \arg(a)$.

Gilt $a \in \mathbb{C}^-$, so enthält die Menge $\{a^b\}$ den Wert

$$e^{b \operatorname{Log}(a)} = e^{b(\log(|a|) + i\alpha)} \qquad \text{mit } \alpha = \arg(a) \in (-\pi, \pi).$$

Dieser Wert heißt der Hauptwert von $\{a^b\}$.

Erweiterung $\mathbb{C}^*$ von $\mathbb{C}$

Bei der Untersuchung rationaler Funktionen

$$\boldsymbol{R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}} \qquad \text{mit Polynomen } \boldsymbol{p, q} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

ist es sinnvoll, die *Lücken* des Definitionsbereichs (d.h. die Nullstellen von $\boldsymbol{q(z)}$) dadurch zu schließen, dass man $\boldsymbol{R(z)}$ dort den "Wert" ∞ zuordnet, sofern nicht gleichzeitig der Zähler $\boldsymbol{p(z)}$ dort verschwindet.

Notation: $\boldsymbol{z^*} \in \mathbb{C}$ mit $\boldsymbol{q(z^*) = 0}$ und $\boldsymbol{p(z^*) \neq 0}$. Dann $\boldsymbol{R(z^*) := \infty}$. Der Wertebereich von $\boldsymbol{R}$ wird damit um die "Zahl" ∞ erweitert.

Definition: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt Erweiterung der komplexen Zahlenebene. ∞ wird als `unendlich ferner Punkt` bezeichnet.

Rechenregeln für $\mathbb{C}^*$.

Rechenregeln auf $\boldsymbol{C}^*$ (zusätzlich zu den üblichen Rechenregeln in $\mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} a + \infty &:= \infty \qquad \text{für } a \in \mathbb{C} \\ a \cdot \infty &:= \infty \qquad \text{für } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ a/\infty &:= 0 \qquad \text{für } a \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Achtung: $0 \cdot \infty$ und $\infty \pm \infty$ lassen sich nicht sinnvoll (d.h. nicht widerspruchsfrei) definieren.

Further Reading: $\mathbb{C}^*$ ist ein `topologischer Raum`. Für $(z_n)_n$, $z_n \neq 0$, gilt

$$z_n \to \infty \quad \text{für } n \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1/z_n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\mathbb{C}^*$ ist `folgenkompakt`, d.h. *jede* Folge in $\mathbb{C}^*$ besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt. Daher wird $\mathbb{C}^*$ als `Kompaktifizierung` von $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Die stereographische Projektion

$\mathbb{S}^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$ bezeichne die Riemannschen Zahlenkugel.
$P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ mit

$$z = P(X) := \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} \in \mathbb{C}^* \qquad \text{für } X = (X_1, X_2, X_3)^T \in \mathbb{S}^2.$$

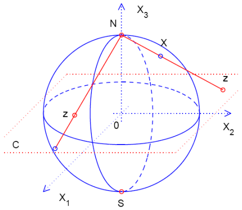
heißt stereographische Projektion.

- $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^*$ ist bijektiv.

- Die Umkehrabbildung P^{-1} von P ist gegeben durch

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}}\right)^T \in \mathbb{S}^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$

Geometrie der stereographischen Projektion



• Die obere Hälfte der Sphäre $\mathbb{S}^2$ (die obere Halbkugel) wird durch $\boldsymbol{P}$ auf $|\boldsymbol{z}| > 1$ abgebildet, die untere Hälfte (untere Halbkugel) wird auf $|\boldsymbol{z}| < 1$ abgebildet. Der Äquator

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^2 \mid \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, 0)^T \right\}$$

bleibt fest, d.h. mit $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ ist $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$.

Eigenschaften der stereographischen Projektion

$\boldsymbol{U}$ heißt sphärisches Bild von $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{C}^*$ gdw $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{B}$.

- Das sphärische Bild einer Geraden in $\mathbb{C}^*$ ist ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der durch $\boldsymbol{N}$ geht.
- Ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der durch $\boldsymbol{N}$ geht, wird durch die stereographische Projektion auf eine Gerade in $\mathbb{C}^*$ abgebildet.
- Das sphärische Bild eines Kreises in $\mathbb{C}$ ist ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der nicht durch $\boldsymbol{N}$ geht.
- Ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der nicht durch $\boldsymbol{N}$ geht, wird durch die stereographische Projektion auf einen Kreis in $\mathbb{C}$ abgebildet.
- Die stereographische Projektion ist kreistreu.

Möbius-Transformationen

Eine rationale Abbildung der Form

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit } ad \neq bc$$

heißt Möbius-Transformation.

Für eine Möbius-Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ gilt:

- Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen.
- $T(-d/c) = \infty$ und $T(\infty) = a/c$.
- $T(z)$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$,

$$T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Komposition von Möbius-Transformationen

Die Komposition zweier Möbius-Transformationen ist eine Möbius-Transformation.
Genauer gilt:

$$\begin{aligned} w = T_1(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{für } ad \neq bc \\ u = (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(w) &= \frac{\alpha w + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \text{für } \alpha\delta \neq \beta\gamma \\ &= \frac{Az+B}{Cz+D} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Kreistreue von Möbius-Transformationen.

Möbius-Transformationen sind *kreistreu*, d.h. (verallgemeinerte) Kreise in $\mathbb{C}^*$ gehen durch Möbius-Transformationen in (verallgemeinerte) Kreise über.

Nachweis: Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad \neq bc$ eine Möbius-Transformation.
Fall (a): Für $c = 0$ ist T linear und somit kreistreu.
Fall (b): Für $c \neq 0$ schreibe

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}\,\frac{1}{cz+d}$$

und zeige, dass $f(z) = 1/z$ kreistreu ist. Dann ist $T(z)$ als Komposition kreistreuer Abbildungen kreistreu.

Idee: Um zu zeigen, dass f kreistreu ist, wenden wir die (kreistreue!) stereographische Projektion auf $w = 1/z$ an.

Möbius-Transformationen sind kreistreu

Es gilt

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \frac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})}, \frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2$$

Für das Bild von $1/z$ unter P^{-1} bekommen wir somit

$$\begin{aligned} X' &= F(X) = P^{-1}(1/z) \\ &= \left(\frac{1/z+1/\bar{z}}{1+(1/z)(1/\bar{z})}, \frac{1/z-1/\bar{z}}{i(1+(1/z)(1/\bar{z}))}, \frac{(1/z)(1/\bar{z})-1}{1+(1/z)(1/\bar{z})} \right)^T \\ &= \left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, -\frac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})}, -\frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} \right)^T \\ &= (X_1, -X_2, -X_3)^T \end{aligned}$$

$F(X)$ beschreibt eine Drehung um die X_1-Achse mit Winkel π und ist daher kreistreu. Damit auch die Komposition

$$f(z) = P \circ F \circ P^{-1}.$$

Eigenschaften von Möbius-Transformationen

Eine Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{mit } ad \neq bc$$

erfüllt

- (Verallgemeinerte) Kreise durch den Punkt $-d/c$ werden durch T auf Geraden in der w-Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der z-Ebene werden durch T in (verallgemeinerte) Kreise der w-Ebene durch den Punkt a/c abgebildet.
- Kreise, die *nicht* durch den Punkt $-d/c$ gehen, werden durch T in Kreise abgebildet, die *nicht* durch den Punkt a/c gehen.

Doppelverhältnis und Möbius-Transformationen

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ jeweils paarweise verschieden. Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, welche die Interpolationsbedingungen

$$w_j = T(z_j) \qquad \text{für } j = 1,2,3$$

erfüllt.

Die interpolierende Möbius-Transformation $T(z)$ ist gegeben durch die `Dreipunkteformel`

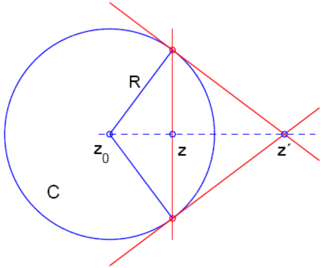
$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

heißt das `Doppelverhältnis` der Punkte z_0, z_1, z_2, z_3.

Symmetrie zum Kreis

Liegen die Punkte z und z' wie in der folgenden Abbildung, so sagt man, die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$.



z und z' liegen symmetrisch zum Kreis C

Symmetrien zum Kreise und Möbius-Transformationen

Es gilt

- Die Abbildung $z \to z'$ heißt `Inversion am Kreis` bzw. `Spiegelung am Kreis`.
- Ein Punkt z mit $|z - z_0| \leq R$ ist stets zu einem Punkt z' mit $|z' - z_0| \geq R$ symmetrisch.
- Gilt $|z - z_0| = R$, so ist z zu sich selbst symmetrisch, d.h. $z' = z$.
- Der Punkt $z = z_0$ ist zu $z' = \infty$ symmetrisch.
- Es gilt $(z - z_0)\overline{(z' - z_0)} = R^2$.

Möbius-Transformationen erhalten Symmetrien zu (verallgemeinerten) Kreisen, d.h. ist C ein (verallgemeinerter) Kreis in $\mathbb{C}^*$ und liegen z und z' symmetrisch zu C, so liegen die Bilder von z, z' unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zu $T(C)$ in $\mathbb{C}^*$.