Buch Kap. 10.2 – Differentiation komplexer Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. $f : D \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z \in D$, falls

$$f'(z) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

existiert.

Satz 10.1: Sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenzierbar in $z = x + iy$. Dann besitzen die Funktionen u und v in (x, y) partielle Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y und es gelten die CAUCHY-RIEMANN**schen Differentialgleichungen**

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \text{ und } v_x(x, y) = -u_y(x, y). \qquad (*)$$

Für die Ableitung f' in z gilt

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y).$$

Sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in D **stetig** partiell differenzierbar und gilt $(*)$, so ist $f = u + iv$ in D komplex differenzierbar.

Buch Kap. 10.2 – Analytische Funktionen

Defintion 10.1: Komplexe Funktionen, die in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ differenzierbar sind, heißen (dort) **analytisch** oder **holomorph**. Für $D = \mathbb{C}$ heißt die Funktion ganz.

Differentiationsregeln

- $f'(z) = nz^{n-1}$ für $f(z) = z^n$
- $f'(z) = g'(z) + h'(z)$ für $f(z) = g(z) + h(z)$
- $f'(z) = g'(z)h(z) + g(z)h'(z)$ für $f(z) = g(z)h(z)$
- $f'(z) = \frac{g'(z)h(z) - g(z)h'(z)}{h^2(z)}$ für $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $h(z) \neq 0$
- $f'(z) = g'(h(z))h'(z)$ für $f(z) = g(h(z))$

Damit sind Summe, Produkt, Quotient und Verkettung analytischer Funktionen wieder analytisch.