Geometrie der komplexen Differenzierbarkeit

Sei $f : D(f) \to W(f)$ eine analytische Funktion und $z_0 \in D(f)$ ein Punkt. Weiterhin sei

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\} \subset D(f)$$

eine Kurve, die z_0 enthält, d.h. $z_0 = \gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in [\alpha, \beta]$.
Schließlich seien $x(t)$ und $y(t)$ in t_0 differenzierbar. Dann ist $z(t)$ in t_0 differenzierbar mit Ableitung

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Im folgenden setzen wir $z'(t_0) \neq 0$ voraus.
Frage: Wie verhält sich die Kurve γ unter der Abbildung f?
Betrachte dazu das Bild

$$\gamma = \{w(t) = f(z(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

mit $w_0(t_0) = f(z(t_0))$, kurz $w_0 = f(z_0)$.

Geometrische Interpretationen

Beachte: Der Tangentenvektor $w'(t_0)$ von γ in w_0 berechnet sich nach der Kettenregel zu

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0).$$

Für $f'(z_0) \neq 0$ gilt dann

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)).$$

bzw.

$$\alpha^* = \alpha + \omega$$

für $\alpha^* = \arg(w'(t_0))$, $\alpha = \arg(z'(t_0))$ und $\omega = \arg(f'(z_0))$.

Geometrische Interpretationen:

- Man erhält den Tangentenvektor von γ durch Drehung von γ um Winkel ω;
- Der Drehwinkel ω hängt von f und z_0 ab, aber nicht von γ;
- Der Tangentenvektor *jeder* Kurve durch z_0 wird durch die Abbildung f um den Winkel $\omega = \arg(f'(z_0))$ gedreht.

Winkeltreue (Konforme) Abbildungen

Definition:
Eine Abbildung $f : D(f) \to W(f)$, unter der alle Winkel (inklusive deren Orientierung) erhalten bleiben, nennt man winkeltreu bzw.konform.

Satz:
Eine analytische Funktion $f : D(f) \to W(f)$ ist in jedem Punkt $z_0 \in D(f)$ mit $f'(z_0) \neq 0$ konform.

Weiterhin gilt die folgende Umkehrung des Satzes.

Satz:
Sei $f : D(f) \to W(f)$ in $z_0 \in D(f)$ konform. Weiterhin seien Real- und Imaginärteil $u(z)$ und $v(z)$ von $f = u + iv$ in einer Umgebung von z_0 stetig differenzierbar. Dann ist f komplex differenzierbar mit $f'(z_0) \neq 0$.

Integration komplexer Funktionen

Sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine auf $D \subset \mathbb{C}$ definierte, stetige komplexe Funktion. Wir wollen f integrieren. Das geht auf vielen 'Wegen'.

Unter einer **Kurve** in der Gaußschen Zahlenebene versteht man eine Punktmenge γ, die sich in der Form $z(t) = x(t) + iy(t)$ mit stetigen reellwertigen Funktionen $x(t),\ y(t)$ darstellen lässt (Parameterdarstellung). z bildet ein Intervall $[a,b]$ in $\mathbb{C}$ ab. Die Kurve heißt stetig differenzierbar, wenn $x(t),\ y(t)$ stetige Ableitungen haben.

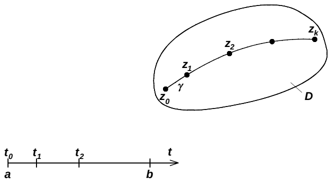

Abb. 10.9: Zur Definition des komplexen Kurvenintegrals $\int_\gamma f(z)\, dz$

Komplexe Kurvenintegrale und Arbeitsintegrale

Es sei $\gamma \subset D$. Unterteile $[a, b]$ in k Teilintervalle $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{k-1}, b]$. Den Punkten t_j $(0 \leq j \leq k)$ entsprechen dann die Kurvenpunkte $z_j = z(t_j) = x(t_j) + iy(t_j)$. Bei in D stetigem f gilt

$$\sum_{j=1}^{k} f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \to c =: \int_\gamma f(z)dz \text{ (komplexes Kurvenintegral längs } \gamma),$$

für Feinheit der Zerlegung gegen Null. Mit $f = u + iv$ finden wir

$$\begin{aligned} f(z_j)(z_j - z_{j-1}) &= u(x_j, y_j)(x_j - x_{j-1}) - v(x_j, y_j)(y_j - y_{j-1}) \\ &\quad + i[u(x_j, y_j)(y_j - y_{j-1}) + v(x_j, y_j)(x_j - x_{j-1})]. \end{aligned}$$

Damit (siehe Arbeitsintegral, Kap. 8)

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma (u, -v)^t \cdot (dx, dy)^t + i \int_\gamma (v, u)^t \cdot (dx, dy)^t = \\ &= \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y})\, dt + i \int_a^b (v\dot{x} + u\dot{y})\, dt. \end{aligned}$$

Rechenregeln komplexes Kurvenintegral

Wegen $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt.$$

Rechenregeln:

- $\int_\gamma [c_1 f(z) + c_2 g(z)]\,dz = c_1 \int_\gamma f(z)\,dz + c_2 \int_\gamma g(z)\,dz$,
- $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$,
- $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma^*} f(z)\,dz$,
- $|\int_\gamma f(z)dz| \leq$ Länge$(\gamma)\,\max_{z\in\gamma}|f(z)|$,

für stetige Funktionen $f,\ g$ und $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$ sowie $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ und $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ oder Endpunkt von γ_1 ist gleich Anfangspunkt von γ_2. Dabei ist γ^* der gegenläufig zu γ durchlaufene Kurve (Weg).

Komplexe Kurvenintegrale und der Satz von Green

Die Identität

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u, -v)^t \cdot (dx, dy)^t + i \int_\gamma (v, u)^t \cdot (dx, dy)^t$$

liefert mit dem Satz 8.7 von Green (für $w = (a, b)^t$, γ Rand von G)

$$\int_\gamma w \cdot (dx, dy)^t = \int_\gamma adx + bdy = \int_G b_x - a_y dxdy$$

direkt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -\int_G (v_x + u_y)\, dxdy + i \int_G (u_x - v_y)\, dxdy.$$

Cauchy Integralsatz 10.3

Ist γ eine geschlossene Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D und ist f in D analytisch, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Bew.: $f = u + iv$ analytisch, also gelten die CRDGLen

$$u_x = v_y \text{ und } v_x = -u_y.$$

Damit ergibt sich mit dem Satz von Green (γ Rand G)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_G (v_x + u_y)\,dxdy + i\int_G (u_x - v_y)\,dxdy = 0.$$

Einfach zusammenhängend: γ ist Rand G, die Menge G kann somit keine Löcher enthalten.

Stammfunktionen

$F(z)$ heißt Stammfunktion der analytischen Funktion $f(z)$, falls

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = F'(z)$$

gilt. Hat man eine Stammfunktion gegeben, ergibt sich für $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \frac{dF(z)}{dz}\, dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

denn

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t))dt = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Vergleiche auch Stammfunktionen von Gradienten (Potential-) Feldern.

Eigenschaften komplexer Integrale, Satz 10.4

Ist $\boldsymbol{F}$ Stammfunktion der analytischen Funktion $\boldsymbol{f}$, dann gilt:

i) Für eine Kurve $\gamma = \{z(t) \mid a \leq t \leq b\}$ ist

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z(b)) - F(z(a)) \; .$$

ii) Das Integral über $f(z)$ ist wegunabhängig, d.h. für $\gamma_1 = \{z_1(t) \mid a \leq t \leq b\}$ und $\gamma_2 = \{z_2(t) \mid a \leq t \leq b\}$ mit $z_1(a) = z_2(a)$ und $z_1(b) = z_2(b)$ gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \; .$$

Ist das Integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ wegunabhängig, dann gibt es immer eine Stammfunktion von $\boldsymbol{f}$, und zwar

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta \; .$$