Folgerungen aus dem Cauchy Integralsatz

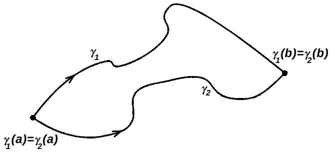
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D. Dann ist das komplexe Kurvenintegral von f wegunabhängig, denn

$$0 = \int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2^*} f(z)\, dz,$$

also

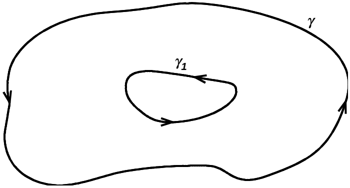
$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz,$$

siehe nachfolgende Abb. 10.12

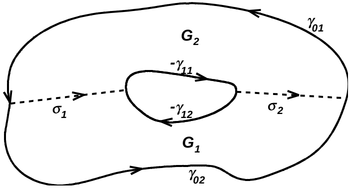


Wegunabhängigkeit des Integrals analytischer Funktionen

Mehrfach zusammenhängende Gebiete



Zweifach zusammenhängendes Gebiet



Aufteilung eines zweifach zusammenhängenden Gebiets ($\gamma = \gamma_{01} \cup \gamma_{02}, \gamma_1 = \gamma_{11} \cup \gamma_{12}$)

Es gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz,$$

wobei das von γ und γ_1 berandete Gebiet 2fach zusammenhängend ist. Nachweis: Integration oben herum und unten herum ergibt Null, Addition beider Integrale liefert die Behauptung.

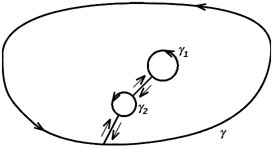
Integral über mehrfach zusammenhängende Gebiete

Seien $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene, doppelpunktfreie, stückweise glatte, positiv (d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn) orientierte Kurven, wobei die Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ im Innern von γ liegen und weder sich gegenseitig noch die Kurve γ berühren. Die Punkte, die im Innern von γ, aber außerhalb der von den Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ umschlossenen Gebiete $G_1, G_2, \ldots, G_n$ liegen, bilden ein n-fach zusammenhängendes Gebiet G.

$f(z)$ sei in G einschließlich der Ränder $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (d.h. etwa in einem G und die Randkurven $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ enthaltenden, n-fach zusammenhängenden Gebiet D) analytisch.

Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz\ .$$

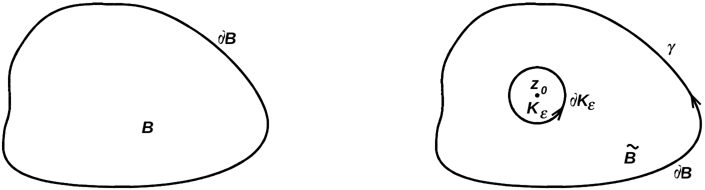


Integrationswege in mehrfach zusammenhängenden Gebieten

Satz 10.6: Cauchy Integralformel

Ist f eine in einem Gebiet G analytische Funktion und z_0 ein innerer Punkt des Bereiches $B \subset G$. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$



Skizze zur Cauchy Integralformel; $\tilde{B} = B \setminus K_\epsilon(z_0)$

Bew.: $\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\partial K_\epsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} if(z_0 + re^{it})dt \to f(z_0)2\pi i$ für $r \to 0$.

Folgerungen aus der Cauchy Integralformel

i.) Satz 10.7 (Integralformel für die n-te Ableitung): Vor. wie in Satz 10.6. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Insbesondere ist f $\infty-$oft komplex differenzierbar.

ii.) $\mathcal{C}$ sei geschlossene Kurve und f analytisch in dem von $\mathcal{C}$ berandetem Gebiet G. Dann sind die Funktionswerte von f in G durch die Werte von f auf $\mathcal{C}$ festgelegt.

iii.) Mit den Vor. aus ii.) seien f, g in G analytische Funktionen mit $f = g$ auf $\mathcal{C}$. Dann gilt schon $f = g$ in G.