Behandlung von Singularitäten und der Residuensatz

Stellen, an denen komplexe Funktionen nicht definiert sind, heißen **Singularitäten**.

Das Verhalten in der Nähe Singulariäten beschreibt

Satz 10.9 (Laurent-Reihenentwicklung): Sei f auf der offenen Menge G bis auf isolierte Singularitäten analytisch und sei $z_0 \in G$ eine solche, in $K_{z_0,r} = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset G$ unique Singularität. Dann gilt für alle $z \neq z_0$ aus $K_{z_0,r}$ die Laurent-Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

mit Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz.$$

Dabei ist S_r Randkurve von $K_{z_0,r}$.

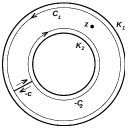
Residuensatz 10.10

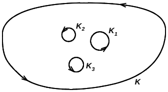
In der Laurententwicklung bei z_0 haängt a_{-1} nicht explizit von z_0 ab. Daher heißt

$$Res(f(z), z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} f(z)\, dz$$

Residuum von f bei z_0. Es gilt der Residuensatz
$f(z)$ sei in G mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ analytisch. $B \subset G$ sei ein Bereich mit geschlossener, stückweise glatter Randkurve $K = \partial B$, die sämtliche Singularitäten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ umschließt. Dann gilt

$$\int_K f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), z_k). \tag{1}$$





Integrationswege: Laurententwicklung (links), Residuensatz (rechts)

Satz 10.11: Residuensatz bei Polstellen

Singularitäten: z_0 heißt

- hebbar, falls in der Laurententwicklung $a_l = 0$ für alle $l \leq 0$ gilt,
- Polstelle $m-$ter Ordnung, falls $a_l = 0$ für alle $l < -m$ und $a_{-m} \neq 0$,
- wesentliche Singularität, falls die Laurententwicklung bei z_0 unendlich viele Koeffizienten mit negativem Index besitzt.

Die Funktion $q(z)$ sei analytisch in einer Umgebung von z_0 mit $q(z_0) \neq 0$. Die Funktion f sei durch

$$f(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} \quad (m \in \mathbb{N})$$

erklärt, habe also für $z = z_0$ einen Pol m-ter Ordnung. Dann gilt

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} q^{(m-1)}(z_0) \ .$$