Satz 10.11: Residuensatz bei Polstellen

Singularitäten: z_0 heißt

- hebbar, falls in der Laurententwicklung $a_l = 0$ für alle $l \leq 0$ gilt,
- Polstelle $m-$ter Ordnung, falls $a_l = 0$ für alle $l < -m$ und $a_{-m} \neq 0$,
- wesentliche Singularität, falls die Laurententwicklung bei z_0 unendlich viele Koeffizienten mit negativem Index besitzt.

Die Funktion $q(z)$ sei analytisch in einer Umgebung von z_0 mit $q(z_0) \neq 0$. Die Funktion f sei durch

$$f(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} \quad (m \in \mathbb{N})$$

erklärt, habe also für $z = z_0$ einen Pol m-ter Ordnung. Dann gilt

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} q^{(m-1)}(z_0) \; .$$

Integralberechnung mit dem Residuensatz I

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine echt gebrochen rationale Funktion mit reellen Polynomen p und q, wobei das Nennerpolynom $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Außerdem gelte für die Polynomgrade $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$. Die Funktion $f(z)$ besitze die isolierten Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$ mit jeweils positivem Imaginärteil. Dann gilt die Berechnungsformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)\ .$$

Beachte: Singulariäten von f sind die Nullstellen von q. Da q reell, treten diese immer in komplex-konjugierten Paaren auf. Also sind mit $z_1, \ldots, z_m$ auch $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$ Nullstellen von q und somit Singularitäten.

Integralberechnung mit dem Residuensatz II

Seien p und q Polynome mit reellen Koeffizienten, wobei $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Für die Polynomgrade gelte $grad(q) \geq grad(p) + 1$. Die Funktion $\frac{p(z)}{q(z)}$ habe die isolierten Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$ mit positivem Imaginärteil. Setzt man

$$f(z) = e^{iz} \frac{p(z)}{q(z)} \;,$$

so gelten die Berechnungsformeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \frac{p(x)}{q(x)} dx = \mathrm{Re}[2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)] = -2\pi \mathrm{Im}[\sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)]$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \frac{p(x)}{q(x)} dx = \mathrm{Im}[2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)] = 2\pi \mathrm{Re}[\sum_{k=1}^{m} Res(f(z), z_k)].$$