Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 2, 13. April 2017

Geometrie komplexer Funktionen

Michael Hinze

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\Rightarrow \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \qquad$ (wie gehabt)

aber $\cos z$, $\sin z$ <u>nicht</u> beschränkt, wobei $f: D \supset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt heißen soll, falls $|f(z)| \le M \quad \forall_{z \in D}$ mit einem $0 \le M < \infty$.

z Bsp $\sin z$ für $z = iy$

$|\sin z| = \frac{1}{4} |e^{-y} - e^{y}| \xrightarrow{|y| \to \infty} \infty$

Systematisch; was machen komplexe Funktionen?

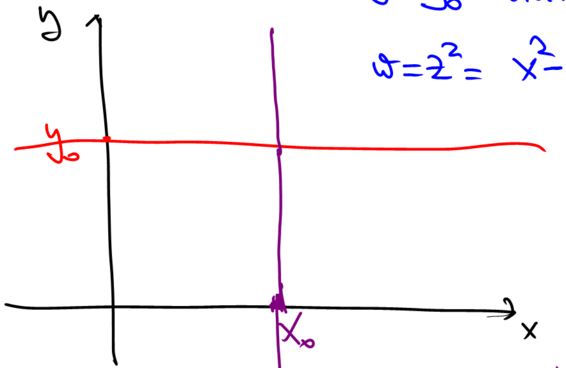
i) $f(z) = az + b = |a| e^{i\varphi} z + b$ mit $\varphi = \arg(a)$

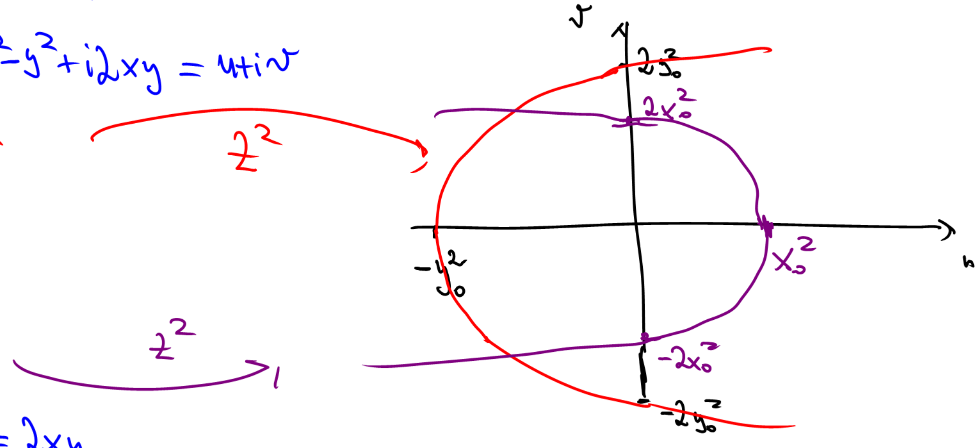
Stauchung / Streckung von z mit $|a|$ und Drehung um φ mit Translation um b

ii) $f(z) = az^2 + \underbrace{bz + c}_{\text{siehe i)}}$ $\qquad \hookrightarrow$ Betrachte Geometrie von $z \mapsto z^2$

$z=(x,y)$ $\quad y=y_0$ (Parallele zur x-Achse)

$w=z^2=x^2-y^2+i2xy=u+iv$





$y=y_0: \quad u=x^2-y_0^2, \quad v=2xy_0$

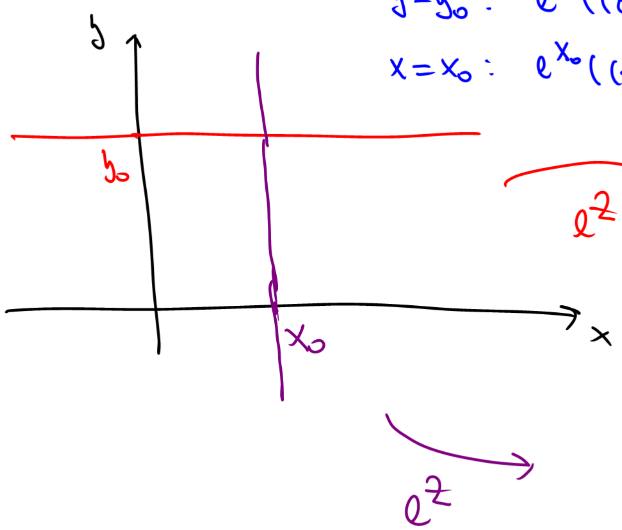
$\Longrightarrow \quad v=\pm 2|y_0|\sqrt{u+y_0^2}$

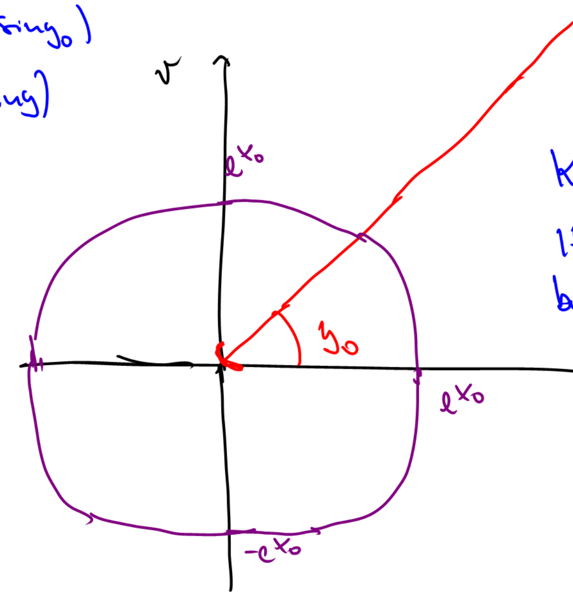
$x=x_0: \quad v=\pm 2|x_0|\sqrt{x_0^2-u}$

iii) $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

$y=y_0: \quad e^x(\cos y_0+i\sin y_0)$

$x=x_0: \quad e^{x_0}(\cos y+i\sin y)$





Kreis wird für $|y|\to\infty$ beliebig oft durchlaufen

$$e^{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

<u>Umkehrfunktion</u>

$f(z)$ heißt injektiv (eineindeutig), falls zu jedem $w\in W(f)$ genau ein $z\in D(f)$ mit $f(z)=w$ gibt.

Bsp: i.) $f(z)=az+b$, $a\neq 0$ injektiv mit $D=W=\mathbb{C}$

ii) $f(z)=e^z$ nicht injektiv, weil

$f(z)=f(z+i2\pi k)$ $\forall_{k\in\mathbb{Z}}$ für $D=\mathbb{C}$

Falls (z.B.) $D=\{z\in\mathbb{C};\ -\pi<\operatorname{Im} z<\pi\}$ dann e^z injektiv

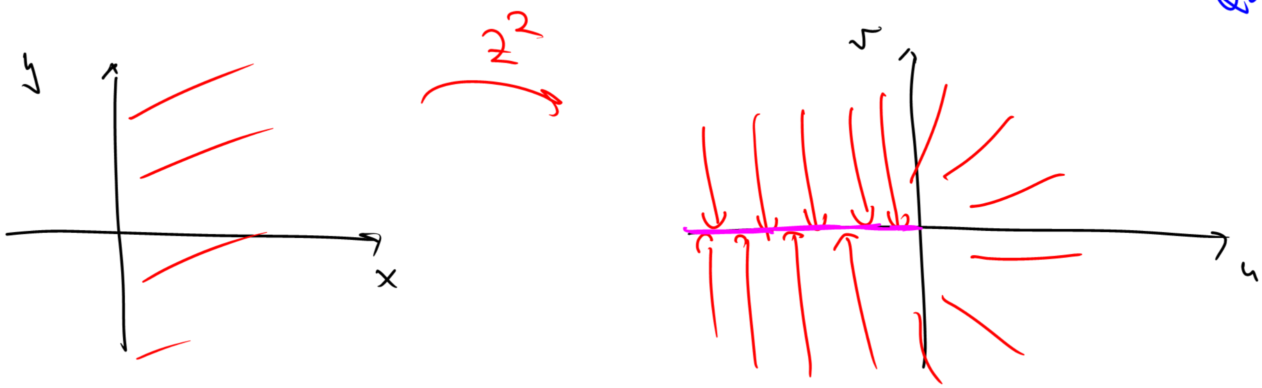
$e^D=\mathbb{C}^-$ (einmal) Streifen in Gauß'scher Zahlenebene

iii) $f(z)=z^2$, $D=\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re} z>0\}$ Rechter Teil der Gauß'schen Zahlenebene ohne imaginäre Achse

Damit

$W(f)=\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Im} z\neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re} z>0\}$

$=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{R};\ \operatorname{Re} z<0\} =: \mathbb{C}^-$ geschlitzte Gauß'sche Zahlenebene



Sei $f: D(f)\longrightarrow W(f)$ injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: W(f)\longrightarrow D(f)$ die Funktion, welche

$(f^{-1}\circ f)(z)=z \quad \forall_{z\in D(f)}$

$$(f \circ f^{-1})(w) = w \quad \forall_{w \in W(f)}$$

erfüllt.

Bsp i) $f(z) = z^2$ mit $D(f) := \{ z = re^{i\varphi};\ r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \}$

Dann ist $f: D(f) \longrightarrow \mathbb{C}^-$ injektiv, s. oben

$f^{-1}: W(f) \longrightarrow D(f)$, $\quad f^{-1}(w) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$

ii) $f(z) = z^n$, $n \geq 2$, $D(f) = \{ z = re^{i\varphi};\ r > 0;\ -\frac{\pi}{n} < \varphi < \frac{\pi}{n} \}$

Dann $f: D(f) \rightarrow \mathbb{C}^-$ injektiv, $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n}$

iii) $f(z) = e^z = w = |w| e^{i\varphi} \overset{z = x+iy}{\Longleftrightarrow} e^x = |w|$ und $y = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Log}(w) = \{ \text{Menge der Lösungen von } w = e^z \}$$

$$= \{ \ln|w| + i \arg(w + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z} \}$$

Umkehrfunktion für $D(e^z) = S = \{ z \in \mathbb{C};\ -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \}$

$e^S = \mathbb{C}^-$

Hauptwert des komplexen Logarithmus $\quad \ln: \mathbb{C}^- \longrightarrow S$, $\quad w \longmapsto z = \ln(w)$

mit $\ln(w) = \ln|w| + i \arg w \quad (-\pi < \arg w < \pi)$.