Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 4, 27. April 2017

Differenzierbarkeit

Michael Hinze

Def 1 $f: \mathbb{C} \supseteq G \to \mathbb{C}$ Funktion, $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet.

Dann heißt f in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar (kurz: diffbar) :$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ existiert. Notation: } f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

Wir sagen, dass $\underbrace{f \text{ holomorph}}_{\text{häufig auch: "f analytisch"}}$ auf G ist, falls f für alle $z \in G$ diffbar ist.

Bsp 1

G	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^-$	$\mathbb{C}^-$	$\mathbb{C}$
$f(z)$	e^{az}	$\sin z$	$\cos z$	$\log z$	$\sqrt{z}$	z^α $(\alpha \geq 1)$
$f'(z)$	$a e^{az}$	$\cos z$	$-\sin z$	$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{2\sqrt{z}}$	$\alpha z^{\alpha-1}$

Charakterisierung holomorpher Funktionen

Schreibe $f(z) = u(z) + i\, v(z)$, $u, v: G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$

Frage: f komplex diffbar. Was heißt das für u und v

Erinnerung: $f'(z): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ soll $\mathbb{C}$-linear sein

$\hat{=} \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$ mit $\underbrace{v_x = -u_y \ , \ u_x = v_y}_{\text{Cauchy-Riemann DGLen}}$

f in z_0 komplex differenzierbar $\Longrightarrow$ $f'(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{f(z_0+h_k) - f(z_0)}{h_k}$

mit $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = 0$

i) Wähle $h_k := x_k + i\,0$ und $z_0 = x_0 + i y_0$. Dann

$$f'(z_0) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{u(x_0+x_k, y_0) - u(x_0,y_0)}{x_k} + i \frac{v(x_0+x_k, y_0) - v(x_0,y_0)}{x_k} \right)$$

$$\underset{\text{existiert}}{\overset{\text{Grenzwert}}{=}} \quad u_x(x_0, y_0) \quad + i \quad v_x(x_0,y_0)$$

analog mit $h_k := 0 + i y_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$$f'(z_0) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{u(x_0, y_0+y_k) - u(x_0,y_0)}{i y_k} + i \frac{v(x_0, y_0+y_k) - v(x_0,y_0)}{i y_k} \right)$$

$$= \quad -i\, u_y(x_0,y_0) \quad + \quad v_y(x_0,y_0)$$

Also muß gelten: u und v sind partiell diffbar und erfüllen

CR DGLen $\quad u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$ <u>und</u> $v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0)$

Dies sind die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen!

Es folgt, dass u und v ∞-oft partiell diffbar sind (SgL)

Sind $u, v: G \to \mathbb{R}$ partiell diffbar und erfüllen die CRDGLen, so ist $f(z) := u + iv$ holomorph.

<u>Beachte</u> $f(z) = u + iv$ und $F(x,y) := \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$, so reicht die totale Diffbarkeit von F <u>nicht</u> aus, um auf Holomorphie von f zu schließen!

<u>Bsp</u>: i) $f(z) = z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$, $z = x + iy$

$u_x = 2x$, $u_y = -2y$, $v_x = 2y$, $v_y = 2x$

d.h. $u_x = v_y$ und $v_x = -u_y$ das sind die CRDGLen

ii) $f(z) = \bar{z} = x - iy$, $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$

$u_x = 1 \neq v_y = -1$, f also <u>nicht</u> komplex diffbar!

iii) $f(z) = |z|^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{u(x,y)}$, d.h. $v(x,y) \equiv 0$,

d.h. $u_x = 2x \neq v_y \equiv 0$ für $x \neq 0$ <u>nicht</u> komplex diffbar.

Was machen holomorphe Funktionen?

Sei $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z = x + iy$, $F(x,y) := \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$

Dann gilt, falls f in z_0 komplex diffbar ist:

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in (x_0, y_0) total diffbar, also

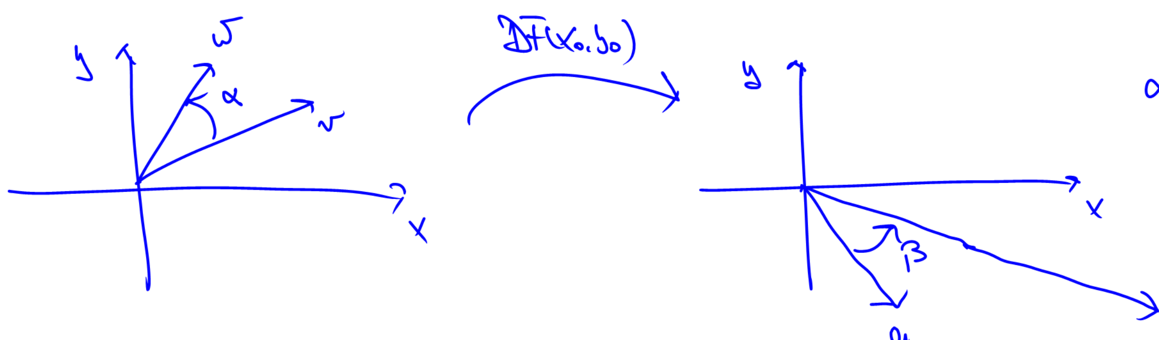
$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + DF(x_0,y_0)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + R(x,y)$$

mit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{R(x,y)}{|z - z_0|} = 0$, wobei

$$DF(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} \overset{\text{CR-DGL}}{=} \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ -u_y(x_0,y_0) & u_x(x_0,y_0) \end{bmatrix},$$

also beschreibt $DF(x_0,y_0)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abb.

Behauptung: $v \longmapsto DF(x_0,y_0)\,v$ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ ist winkeltreu, d.h. mit $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $a = DF(x_0,y_0)\,v$, $b = DF(x_0,y_0)\,w$, so gilt $\alpha := \sphericalangle(v,w) = \sphericalangle(a,b) =: \beta$ mit gleicher Orientierung.



$\alpha = \beta$

Dies folgt mit $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ und $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ aus

$$a = \begin{bmatrix} u_x v_1 + u_y v_2 \\ -u_y v_1 + u_x v_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} u_x w_1 + u_y w_2 \\ -u_y w_1 + u_x w_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \sphericalangle(v,w) = \cos \frac{v^t w}{|v|\,|w|}$$

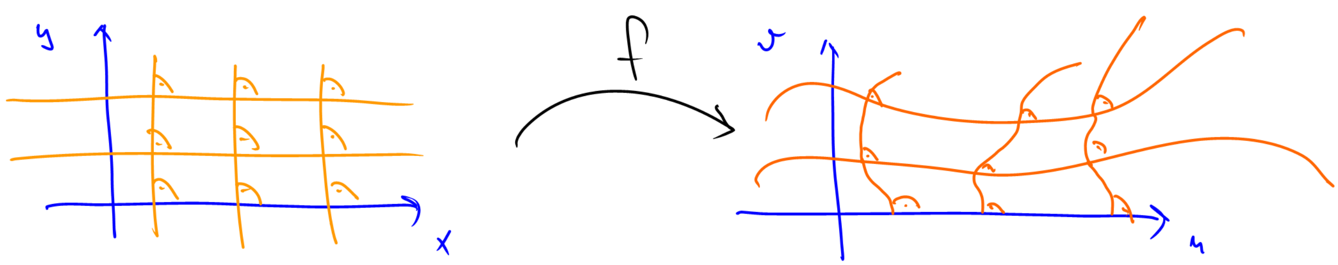
und $\sphericalangle(a,b) = \frac{a^t b}{|a|\,|b|}$ mit $a^t b = \det DF(x_0,y_0)\, v^t w$, $|a|^2 = \det DF(x_0,y_0)\,|v|^2$, $|b|^2 = \det DF(x_0,y_0)\,|w|^2$

Übertrage dieses Resultat auf f: bei z_0 gilt

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)}_{\mathbb{C}\text{-lineares Modell von } f \text{ bei } z_0 \quad T_f(z_0)} + r(z)$$

mit $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{r(z)}{|z-z_0|} = 0$

Wegen $f'(z_0) \sim DF(x_0, y_0)$ gilt für holomorphe Funktionen lokal winkeltreu



<u>Def 1</u> $f: \mathbb{C} \supset G \to \mathbb{C}$ heißt konform (winkel- & orientierungstreu), falls der Schnittwinkel zweier durch einen Punkt z verlaufender Kurven mit dem der Bildkurven unter f übereinstimmt und der Bildwinkel gleiche Orientierung hat.

<u>Satz</u>: Ist $f: \mathbb{C} \supset G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) \neq 0$ in G, so ist f konform in G.