180517 [redacted]

Folgerungen aus Cauchy-Integral Formel

i) f analytisch in G $\Rightarrow$ f ∞-oft diffbar (s. Formel für $f^{(n)}(z_0)$)

ii) Mittelwert Eigenschaft

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt}_{\text{Mittelwert von } f \text{ auf } \partial K_r(z_0)}$$

iii) Maximum Prinzip: Sei f analytisch auf G. Ferner gebe es $z_0 \in G$

(1) mit

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in G$$

$\Rightarrow$ f in G konstant

Bew Idee: $M := |f(z_0)| \overset{\text{Mittelwert Eigensch.}}{=} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt \right|$

Ann: f nicht konstant auf $\overline{K_r(z_0)}$ und $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $\forall z \in G$. Dann

$|f(\tilde{z})| < M$ für ein $\tilde{z} \in \partial K_{\tilde{r}}(z_0)$ mit $\tilde{r} \leq r$

$$M \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \tilde{r}e^{it})|\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi-\varepsilon} |f(z_0 + \tilde{r}e^{it})|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + \tilde{r}e^{it})|}_{\overset{<}{\leq} M}\, dt$$

OE: $\tilde{z} = z_0 + \tilde{r}e^{2\pi i}$
$\Rightarrow |f(z_0 + \tilde{r}e^{it})| < M$ für $t \in (2\pi - \varepsilon, 2\pi]$

$$\leq \frac{2\pi - \varepsilon}{2\pi} M + 1 - 1$$

$$< \frac{2\pi - \varepsilon}{2\pi} M + \frac{2\pi - (2\pi - \varepsilon)}{2\pi} M = M \ \lightning$$

1805 17 [redacted]

$\rightarrow$ $|f|$ auf $K_r(z_0)$ konstant

Argumentieren mit "Kreisketten Verfahren", dass $|f|$ auf G konstant und mit Hilfe CR-Dgl-en, daß f konstant

↳ Übung.

Folgerungen aus Max Prinzip

i.) f analytisch in G, stetig auf $\bar{G}$ und nicht konstant. Dann nimmt $|f|$ auf ∂G seinen maximalen Wert an.

A: $|f(z_0)|$ maximal in $G \xrightarrow{\text{Max Prinzip}} |f|$ konstant ↯

②

ii) Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom (über $\mathbb{C}$) mit Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

Nachweis: A $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\rightarrow$ $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ analytisch in $\mathbb{C}$

Damit $\quad (p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n)$

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{\left|a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)\right|}$$

$$= \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|a_n z^n|} \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{\left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right|}$$

$$= 0.$$

$\rightarrow$ $\exists z_0 \in \mathbb{C}$: $|f(z_0)|$ maximal

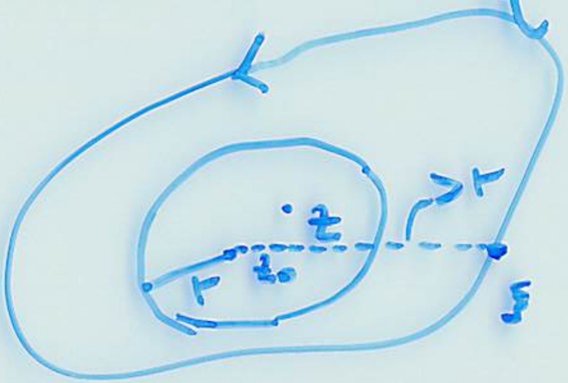
$\xrightarrow{\mathbb{C} = G}$ $|f|$ konstant $\rightarrow$ p konstant ↯

180517 [redacted]

Taylor Formel

f analytisch in G, $\mathcal{C}$ Weg in G, der $z \in G$ umlaufe

$$\underbrace{\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|}_{=:q} < 1 \quad (*)$$



Wir haben mit Cauchy Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$$

Es gilt mit $(*)$:

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$$

(3) Einsetzen liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^n}\, d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi}_{= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Satz: Sei f analytisch in G, $z_0 \in G$. Dann gilt für jeden Kreis $K_r(z_0) \subset G$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \forall z \in K_r(z_0)$$

180517 [redacted]

Bsp.: i) $f(z) = e^z$, $z_0 = 0$

$f^{(n)}(z) = e^z$, $e^0 = 1$ →

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ii) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ analytisch in $K_1(0)$.

Dort $f(z) = \frac{1}{1+z^2} \overset{|z|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$

Folgerungen: i) f analytisch in G, $K_r(z_0) \subset G$. Dann mit

$M(r) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n :$$

(4) $|c_n| = \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \le \frac{M(r)}{r^n}$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$

Nachweis mit Cauchy Integralformel

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\, ds \right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{|f(s)|}{|s-z_0|^{n+1}}\, ds$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}.$$

ii) Satz von Liouville: f analytisch in $\mathbb{C}$ und beschränkt, so ist f konstant auf ganz $\mathbb{C}$.

Nachweis: $|f(z)| \le M$ $\forall z \in \mathbb{C}$ →

$$|c_n| \le \frac{M(r)}{r^n} \le \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r\to\infty} 0, \quad n \ge 1$$

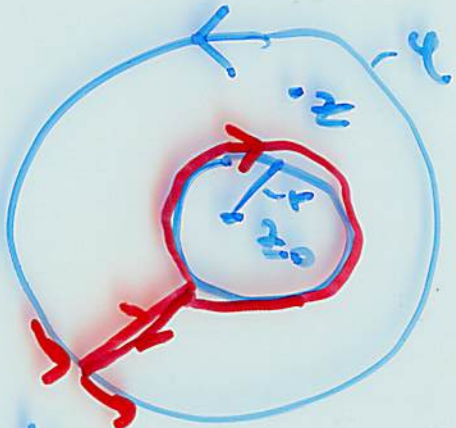
180517 [redacted]

Damit $c_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

$\to f(z) = c_0 \equiv$ konstant

Beschreibung analytischer Funktionen in der Nähe von Singularitäten

Sei f in $G \setminus \{z_0\}$ analytisch, einf. zshgd.,
$\mathcal{C}$ sei positiv orientierter Kreis um z_0.



Damit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C} \cup \partial K_r(z_0)^*} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi =$$

⑤

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

↪ Laurent Reihenentwicklung