Funktionentheorie/Komplexe Funktionen
TUHH
VL 8, 1. Juni 2017

Residuensatz, Laurent Entwicklung

Michael Hinze

Verhalten komplexer Funktionen in der Nähe von Singularitäten

Sei f in $G \setminus \{z_0\}$ analytisch, f sei also in z_0 nicht erklärt.

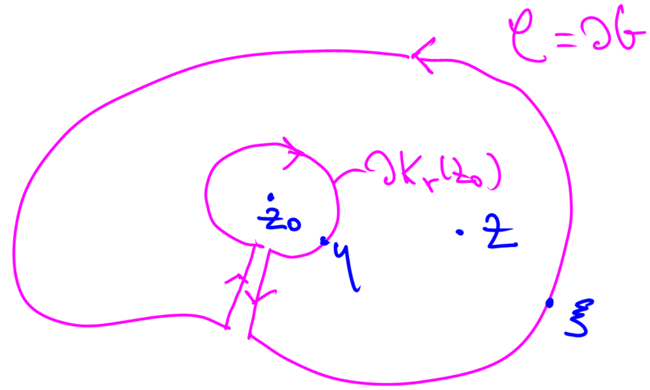
z.Bsp $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$ hebbare Singularität

$f(z) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $q(z_0) = 0$ p, q Polynome Polstelle z_0

$f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0 = 1$ wesentliche Singularität

Damit f in $G \setminus K_r(z_0)$ analytisch, also mit Cauchy Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C \cup \partial K_r(z_0)^*} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(y)}{y - z} \, dy$$

Damit $\frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} < 1 \Longrightarrow$

geom. Reihe

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \, \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \qquad (1)$$

Analog

$$\frac{1}{y - z} = - \frac{1}{z - z_0} \, \frac{1}{1 - \frac{y - z_0}{z - z_0}} \qquad \underline{\text{und}} \quad \frac{|y - z_0|}{|z - z_0|} < 1$$

$$= - \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y - z_0}{z - z_0} \right)^n \qquad (2)$$

Damit
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(y)}{y - z} \, dy$$

$$\overset{(1),(2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(y)(y - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \, dy$$

Setze

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \, , \qquad a_{-n} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(y)}{(y - z_0)^{-n+1}} \, dy$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ $\qquad\qquad$ $n = 1, 2, \dots$

Damit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Laurent-Entwicklung von f bei z_0

Bemerkungen:

i.) Laurent-Entwicklung eindeutig

ii) f analytisch in $K_r(z_0)$, dann

$\frac{f(y)}{(y-z_0)^{k+1}}$ für $k \in \mathbb{Z}$, $k<0$ analytisch,

also gilt mit Cauchy-Integralsatz

$$a_n = 0 \quad \forall_{n \in \mathbb{Z},\, n<0}$$

Wir erhalten dann: Laurent-Reihe = Taylor Reihe

iii) $$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} f(y)\, dy$$

hängt im Integranden nicht von z_0 ab!

Extra-Name: a_{-1} heißt Residuum von f bei z_0.

Kann verstanden werden als Maß dafür, wie weit weg die Funktion bei z_0 von "analytisch" ist.

$$\mathrm{Res}(f(z); z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} f(y)\, dy$$

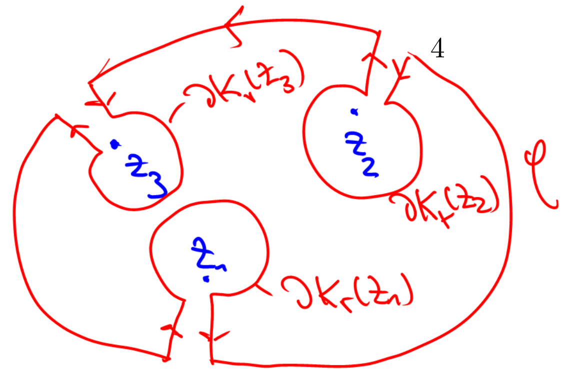
Dies führt auf den

Residuensatz: Sei f analytisch ($\equiv$ holomorph) in $G \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$

Sei φ eine Kurve, die $z_1, \dots, z_n$ umschließt und in G verläuft.

Dann gilt

$$\int_\varphi f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z); z_k)$$



Nachweis:

$$0 = \int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{\partial K_r(z_1)^* \cup \dots \cup \partial K_r(z_n)^*} f(z)\,dz}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\partial K_r(z_k)^*} f(z)\,dz = -\sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z); z_k)$$

Klassifizierung von Singularitäten z_0 von f

i) hebbar, falls $a_k = 0 \ \forall k<0$ a_k Koeffizient in Laurent Entwicklung

ii) Polstelle, falls $a_k = 0 \ \forall k<-m$ und $a_{-m} \neq 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$
m heißt Ordnung der Polstelle

iii) wesentlich, falls $a_k \neq 0 \ \forall k<0$

Zurück zu Residuen:

a) Sei z_0 Pol erster Ordnung von f. Dann

$$\operatorname{Res}(f(z); z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z), \quad \text{weil}$$

$$f(z) = a_{-1} \frac{1}{z-z_0} + a_0 + a_1 (z-z_0) + \dots$$

b) $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$, d.h. z_0 einfache Nullstelle von q. Dann

$$\operatorname{Res}(f(z); z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}, \quad \text{denn}$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

c) $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ $m \in \mathbb{N}$, $g(z_0) \neq 0$

$$\operatorname{Res}(f(z); z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \, g^{(m-1)}(z_0)$$

Anwendung: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \pi$